(1)

Year. Month. Date. ( )

دکتر خوارسی

ریاضی پیشرفته

« جلسه‌ی اول »

منابع درس فصل‌ها :

1) Fourier series & Boundry value problems

J. W. Brown & R. V. churchill. ✓

2) calculus of variation

Gelfand & Fomin

3) Advanced calculus

kharasi @ znu.ac.ir

e.kharasi @gmail.com

znu.ac.ir / members / ehsan_kharasi

[illegible]

اطلاعات درس ۹۵-۹۴

Fourier Series & BVP

فصل اول :

دو هدف اصلی :

۱) نمایش یک تابع داده شده با استفاده از سری‌هایی که دربردارنده‌ی مجموعه‌ای از توابع مشخص است.

۲) $f'' + 2f' + 1 = 0$

$f$ مجهول ؟

برحسب سری فوریه داریم :

$f = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

(وقتی f را با سری ها تقریب بزنیم مشتقات حذف شده ولی مجهول جدید $a_n$ و $b_n$ خواهد بود)

هدف ۲) روشی برای حل مسائل شرایط مرزی در معادلات دیفرانسیل پاره‌ای، با تأکید بر معادلات مطرح

در فیزیک و مهندسی با استفاده از نمایش سری توابع.

با استفاده از سری های فوریه

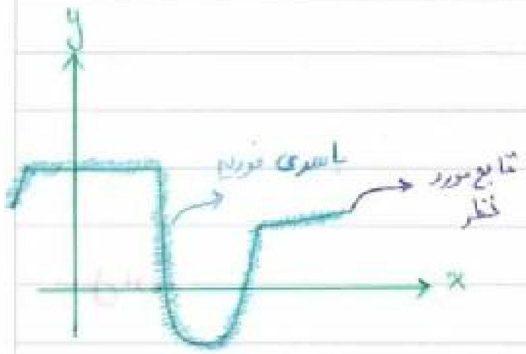
$$(U-\alpha^2)\phi'' + U^2\phi + J\phi' = 0$$

$$\phi = \sum a_n \cos nx$$

$$\sum \left( -n^2 a_n (U-\alpha^2)\sin^2 nx + U^2 a_n \cos nx - nJ a_n \sin nx \right) = 0$$

? ? ?

$a_n$ مجهول




معادلات:

PDE پاره‌ای — Partial Differential Equation

تابع مجهول، تابعی از چند متغیر است.

ODE معمولی — Ordinary Differential Equation

تابع مجهول، تابعی از یک متغیر است

نویر استوکس ← PDE

Boundary value problems — BVP : مقدار مرزی

مقدار تابع در مرزها مشخص است.

معادلات

Initial value problems — IVP : مقدار اولیه

مقدار تابع در لحظه‌ی صفر مشخص است.

۱- معادلات مقدار مرزی خطی

تابع یا متغیر وابسته، لازم است که برخی از شرایط را در محدوده‌ای که معادله‌ی دیفرانسیل تعریف شده ارضا کند.

ممکن است مقدار u (تابع یا متغیر وابسته) یا مقدار مشتق u، بر روی مرزها مشخص باشد.

«معادله‌ی ODE و BVP»

$u''(x) - u(x) = -1$ غیرهمگن

$(0<x<1)$

B.C. : $u'(0) = 0 \quad , \quad u(1) = 0$ همگن

«معادله‌ی PDE و BVP»

همگن $u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$ $\quad x,y > 0$ همگن = همه‌اش مساوی صفر

همگن $u(0,y) = u_x(0,y)$ $\quad (y>0)$

غیرهمگن $u(x,0) = \sin x + \cos x$ $\quad (x \geq 0)$

معادله‌ی دیفرانسیل خطی:

شرایط مرزی و معادله فقط حاوی عبارت‌های درجه‌ی ۱ از u یا مشتقات u باشد.

شکل کلی معادلات PDE مرتبه ۲ خطی :

$$A u_{xx} + B u_{xy} + C u_{yy} + D u_x + E u_y + F u = G$$

حروف A تا G ضرایب ثابت یا تابعی از متغیرهای مستقل $x$ و $y$ هستند.

فرض : $u_{xy} = u_{yx}$

خطی: $Z u_{xx} + xy^2 u_{yy} - e^x u_z = f(y, z)$

غیرخطی: $u_{xx} + \underline{u\, u_y} = x$

* روش های حلی که در ادامه مطرح خواهد شد برای معادلات غیرخطی نیست (برای معادلات خطی است).

تعریف: یک معادله‌ی دیفرانسیل خطی یا شرط مرزی آن در صورتی خطی است که هریک از عبارت های آن (به غیر از صفر) به صورت عبارت مرتبه اول و تابعی از u و مشتقات آن باشد.

(هر عبارتی غیر از u و مشتقاتش در معادلات ظاهر شود ← معادله غیرخطی)

انواع معادلات و شرایط مرزی :

$$A u_{xx} + B u_{xy} + C u_{yy} + D u_x + E u_y + F u = G$$

a) $B^2 - 4AC > 0$ هذلولی

b) $B^2 - 4AC < 0$ بیضی

c) $B^2 - 4AC = 0$ سهمی

یک معادله‌ی بیضوی:

معادله‌ی لاپلاس: $u_{xx} + u_{yy} = 0$

$A = C = 1 \quad , \quad B = 0$

$B^2 - 4AC < 0$

معادلات بیضوی دربردارنده‌ی پدیده‌ای هستند که در آن فرآیند دیفیوژن به حالت پایا رسیده است. (تغییری در حالت نقاط مختلف آن ایجاد نمی‌شود.)

معادلات سهموی:

معادله‌ی یک بعدی گرما: $-ku_{xx} + u_t = 0$

$$\left.\begin{array}{l} A = -k \\ B = C = 0 \end{array}\right\}$$

$B^2 - 4AC = 0$ سهموی ⟵ مسائل دیفیوژن وابسته به زمان

معادلات هذلولوی:

معادله‌ی یک بعدی موج: $-a^2 y_{xx} + y_{tt} = 0$

هذلولوی

دربردارنده‌ی حل های ناپیوسته

$$\left.\begin{array}{l} A = -a^2 \\ B = 0 \\ C = 1 \end{array}\right\} \longrightarrow B^2 - 4AC > 0$$

انواع شرایط مرزی:

Dirichlet Condition:

⟵ مقدار $u$ بر روی مرزها معین است.

Neumann Condition:

مقدار مشتق نرمال u بر روی بخشی از مرز معلوم است.

$$\left(\frac{du}{dn}\right)$$

Robin Condition:

مقدار $hu + \frac{du}{dn}$ بر روی مرز معلوم است، h یا ثابت یا تابع است.

« جلسه‌ی دوم »

معادلات PDE:

فصل دوم: سری‌های فوریه

هدف: در این فصل تئوری پایه‌ای سری فوریه که بسط توابع سینوس و کسینوس به صورت سری است، ارائه خواهد شد. (سری فوریه‌ی تابعی را که فاصله‌ی آن تا منحنی است با این سری جمله‌ی sin و cos تقریب می‌زند.)

توابع پیوسته‌ی تکه‌ای:

فضای خطی توابع یا فضای تابع، مجموعه‌ای از توابع با دامنه‌ی تعریف مشترک، به طوری که هر ترکیب خطی از دو تابع متعلق به آن مجموعه باشد.

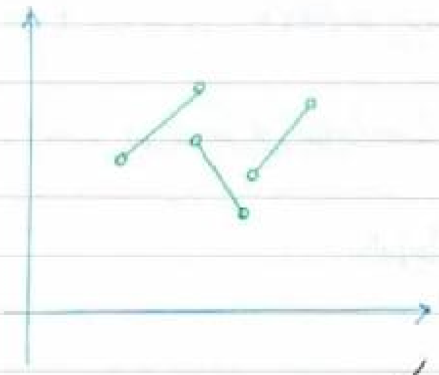
$C_p(a,b)$

تعریف پیوسته‌ی تکه‌ای:

اگر تابع F در همه‌ی نقاط بازه‌ی محدود $a<x<b$ به غیر از نقاط متناهی $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ و $x_n = b$

پیوسته باشد که: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b = x_n$

اگر f در هر زیر بازه‌ی باز: $x_{n-1} < x < b$ و ... و $x_1 < x < x_2$ و $a < x < x_1$ پیوسته باشد، تابع f پیوسته‌ی تکه‌ای خواهد بود.



نکته: لازم نیست f در ابتدا و انتهای بازه پیوسته باشد. اگر f وقتی که x به نقاط ابتدایی و انتهایی بازه‌ها از داخل نزدیک می‌شود، حدود محدود داشته باشد، می‌گوییم f پیوسته‌ی تکه‌ای در بازه‌ی $a < x < b$ است

که به بی‌نهایت میل نکند

باید حدود یک طرفه‌ی زیر موجود باشد:

$$f(x_{k-1}^{+}) = \lim_{\substack{x \to x_{k-1} \\ x > x_{k-1}}} f(x)$$

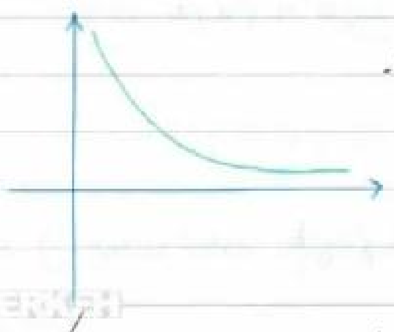
هر ابتدای نقطه‌ی ابتدای بازه

$k = 1, 2, \dots, n$

$$f(x_k^{-}) = \lim_{\substack{x \to x_k \\ x < x_k}} f(x)$$

اگر مقادیر حد درون زیربازه‌ها برابر با مقدار تابع f در نقاط ابتدایی و انتهایی زیر بازه‌ها باشد، آنگاه f در زیر بازه‌ی بسته، پیوسته است.

نکته ۱: هر تابعی که در یک بازه‌ی بسته، پیوسته باشد کران‌دار است.



if $0 < x \leq 1$

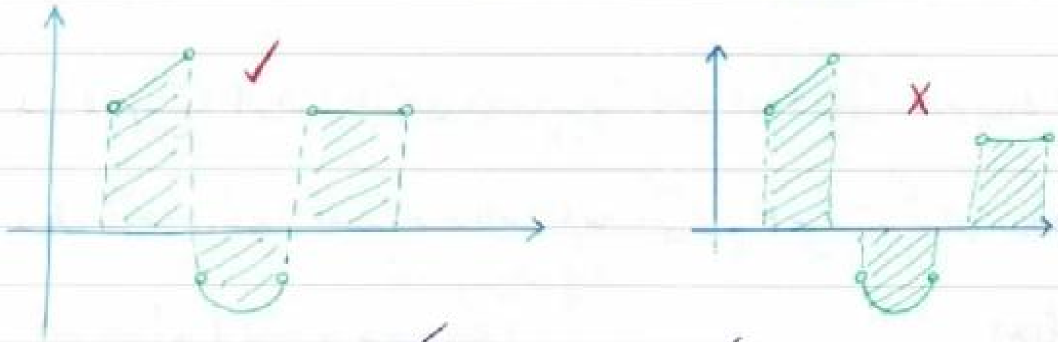
$f = \frac{1}{x}$

در $x = 0$ پیوسته نیست ← بازه باز می‌ماند ← کران‌دار نیست

نکته‌ی ۲: اگر تابع در فاصله‌ی بسته‌ی $a \leq x \leq b$ پیوسته باشد، در بازه‌ی باز $a<x<b$ پیوسته‌ی تکه‌ای خواهد بود.

اگر $f$ در بازه‌ی $a<x<b$ پیوسته‌ی تکه‌ای باشد، انتگرال $f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ همواره موجود است. این انتگرال برابر است با انتگرال $f$ بر روی هر زیربازه‌ای که $f$ در آن پیوسته است.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)\,dx$$



اگر $f_1$ و $f_2$ در بازه‌ی $a<x<b$ پیوسته‌ی تکه‌ای باشند، بنابراین ترکیب خطی $f_1$ و $f_2$ ($c_1f_1+c_2f_2$) یا $f_1f_2$ در هر زیربازه پیوستگی دارد و در فاصله‌ی $a<x<b$ پیوسته‌ی تکه‌ای است.

پس:

انتگرال‌های توابع $c_1f_1 + c_2f_2$، $f_1f_2$، $[f_1(x)]^2$ بر روی بازه‌ی $a<x<b$ موجود است.

چون هر ترکیب خطی از توابعی که پیوسته‌ی تکه‌ای هستند، خود پیوسته‌ی تکه‌ای می‌باشد، مجموعه‌ی توابع تکه‌ای که بر روی بازه‌ی $a<x<b$ تعریف شده و پیوسته‌ی تکه‌ای هستند فضای تابع را تشکیل می‌دهند.
$C_P(a,b)$

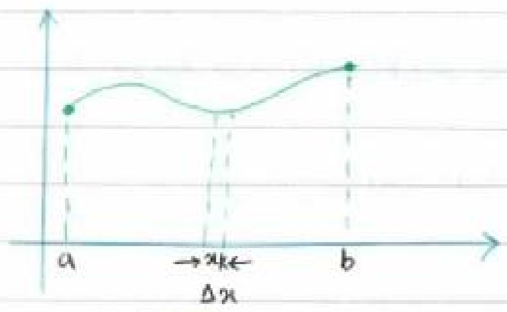
ضرب داخلی و مجموعه‌های متعامد: orthonormal

اگر $f$ و $g$ بر روی بازه‌ی $a \leq x \leq b$ پیوسته باشند:

(۵)

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \doteq \sum_{k=1}^{N} f(x_k)g(x_k)\Delta x \doteq \sum_{k=1}^{N} a_k b_k$$

$\Delta x = \frac{b-a}{N}$ هرچه N بزرگتر، جواب دقیق‌تر




$a_k = f(x_k)\sqrt{\Delta x}$

$b_k = g(x_k)\sqrt{\Delta x}$

$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$

دو شرط دارد:

* $f, g \in C_p(a,b)$

* در بازه‌ی اصلی $a<x<b$، پیوستی تکه‌ای باشند.

$(f,g) = (g,f)$

$(f, g+h) = (f,g) + (f,h)$ h: تابع پیوسته‌ی تکه‌ای

$(cf, g) = c(f,g)$

$(f,f) \geq 0 \rightsquigarrow \underbrace{\|f\|}_{\text{نرم تابع}} = (f,f)^{\frac{1}{2}}$ c: عدد ثابت

$$\|f\| = \left[\int_a^b [f(x)]^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\|f-g\| = \left[\int_a^b \{f(x)-g(x)\}^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

نرم f-g → اندازه‌ی مساحت بین نمودارهای $y=f(x)$ و $y=g(x)$

Year. Month. Date. ( )

$\|f-g\|^2$ : Mean square deviation of one of the functions f & g from the other.

$\dfrac{\|f-g\|^2}{b-a}$ : مقدار متوسط مربعات فواصل عمودی بین نقاط در نمودارها در بازه ی $a<x<b$

دو تابع عمود ند (orthogonal) اگر :

$(f, g) = 0$ یا $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$

که + و - شده و در نهایت صفر می شوند.

اگر $\|f\| = 1$ ، تابع f را نرمالیزه گویند.

اگر $\psi_n(x)$ یک تابع غیر نرمالیزه باشد :

$\phi_n$ : مقدار نرمالیزه شده $\psi_n(x)$

$$\phi_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{\|\psi_n(x)\|} \quad ; \|\phi_n(x)\| = 1$$

مجموعه ی توابع $\psi_n(x)$ ، $n = 1, 2, \ldots$ بر روی بازه ی $a<x<b$ برهم عمودند اگر $(\psi_m, \psi_n) = 0$ ، $n \neq m$

$\phi_n(x)$ بر روی بازه ی $a<x<b$ یک متعامد (orthonormal) خواهد بود اگر :

$$\int_a^b \phi_m(x)\,\phi_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

$m = 1, 2, \ldots$
$n = 1, 2, \ldots$

$$(\phi_n, \phi_m) = \delta_{mn}$$

Year. Month. Date. ( )

$$\int_0^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & m = n \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \int_0^{\pi} \left( \frac{1-\cos 2nx}{2} \right) dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} dx - \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\cos 2nx \, dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4n} \cancel{\sin 2nx} \Big]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \underline{\sin nx \sin mx} \, dx$$

از قاعده تبدیل ضرب به جمع استفاده می‌کنیم. $2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

پس $\Psi_n = \sin nx$ ، متعامد هستند.

$$\| \Psi_n(x) \| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Phi_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$ orthonormal ؛ $\Phi_n(x)$ اندازه 1

$\Psi_n = \cos nx$ متعامد

برای cos هم همینطور است:

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$$\text{متعامد} \; \Phi_n = \frac{\cos nx}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \Rightarrow \int_0^{\pi} \cos^2 x = \int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2} = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} + \cancel{\int_0^{\pi} \frac{\cos 2x}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x) \qquad ①$$

تساوی درست نیست.

هدف اصلی: بیان $f(x)$ برحسب ترکیب خطی توابع متعامد.

ضرب داخلی رابطه ① به $\Phi_m(x)$

$$\int_a^b f(x)\Phi_m(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \Phi_n(x)\Phi_m(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx = \sum c_m \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx \xrightarrow{\text{if } n=m} (f,\phi_n) \overset{!}{=} \sum c_m (\phi_m,\phi_n)$$

$$c_n = (f, \phi_n) = \int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx$$

$\longrightarrow$ if $m=n \longrightarrow (\phi_m,\phi_n)=1 \longrightarrow (f,\phi_n)=c_n$

if $m \neq n \longrightarrow (\phi_m,\phi_n)=0$

«جلسه‌ی سوم»

$f = \sum c_n \phi_n(x)$

نکته: هر برداری که موازی صفحه‌ی $x$-$y$ نباشد را نمی‌توان لزوماً بر حسب $i$ و $j$ (که یکامتعامد هستند) بیان نمود.

$f(x) \simeq \sum c_n \phi_n(x)$ زمانی معتبر است که مجموعه‌ی $\{\phi_n\}$ یکامتعامد و بسته باشد.

یک مجموعه‌ی یکامتعامد در فضای $(a, b)$ یا زیر فضای آن $C_p$ بسته است اگر هیچ تابعی با نرم مثبت در آن موجود نباشد که به هر تابع $\{\phi_n(x)\}$ متعامد باشد.

هر تابع پیوسته‌ی تکه‌ای را می‌توان با یک سری فوریه تقریب زد:

$$f(x) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad -\pi < x < \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos(ns)\,ds \qquad \text{(از صفر تا بی‌نهایت } n\text{)} \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sin(ns)\,ds \qquad \text{(از یک تا بی‌نهایت } n\text{)} \quad n = 1, 2, \ldots$$

هر سری می‌تواند تابعی از $x$ ها

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\,ds + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos\big(n(s-x)\big)\,ds$$

$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos(ns)\,ds$ فقط $a_n$ است

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

اگر $n$ را $\infty$ نگیریم و محدود کنیم به آن سری فوریه جزئی گویند.

$$S_{Nf} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$ : سری جزئی $(N)$

برای نشان دادن اینکه استفاده از سری فوریه کمترین خطا را دارد:

$$\Phi(x) = \gamma_1 \phi_1(x) + \gamma_2 \phi_2(x) + \cdots + \gamma_N \phi_N(x)$$

$\Phi(x)$: ترکیب خطی توابع یکامتعامد (سری $\phi_n$ لزوماً سری فوریه نیست)

$\gamma$: ضرایب ثابت

(۷)

Year: Month: Date: ( )

$$E = \|f-\phi(x)\|^2 = \int_a^b (f-\phi(x))^2 dx = \int_a^b \Big(f-\sum_{n=1}^{N} \gamma_n \phi_n(x)\Big)^2 dx$$

$$= \underbrace{\int_a^b f^2 dx}_{\|f\|^2} - 2\sum_{n=1}^{N} \gamma_n \underbrace{\int_a^b f\phi_n(x)\, dx}_{C_n} + \underbrace{\int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{N} \gamma_n \phi_n(x)\Big)^2 dx}_{A}$$

هدف: در حالتی که $\gamma = c$ باشد خطا کمترین مقدار است.

تولید سری فوریه

$$A = \sum_{n=1}^{N} \gamma_n^2 \underbrace{\int_a^b [\phi_n]^2 dx}_{=1} + 2\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \gamma_n \gamma_m \int_a^b \cancel{\phi_n \phi_m}\, dx \quad (= 0,\ n \neq m)$$

(حالت $m=n$) نرم توابع متعامد $= 1$

$$\Big(\sum_{n=1}^{N} \gamma_n \phi_n\Big) \times \Big(\sum_{n=1}^{N} \gamma_n \phi_n\Big)$$

برای حالت $n=m$

دو حالت پیش می‌آید اندیس‌ها هر دو n یا m است

علت ضریب ۲: چون یکبار ۱ می‌شود یکبار ۲ m می‌شود — برای حالت $n \neq m$

$\gamma_1 \phi_1 \quad \gamma_2 \phi_2$

$\gamma_2 \phi_2 \quad \gamma_1 \phi_1 \Rightarrow$ ضریب ۲

ضریب خطا

$$E = \|f\|^2 - 2\sum_{n=1}^{N} \gamma_n C_n + \sum_{n=1}^{N} \gamma_n^2 + \sum C_n^2 - \sum C_n^2$$

$$= \|f\|^2 + \sum_{n=1}^{N} (\gamma_n - C_n)^2 - \sum_{n=1}^{N} C_n^2$$

خطا زمانی مینیمم است که $\gamma_n = C_n$

قضیه: اگر $C_n$ ها ($n = 1, 2, \ldots$) ضرایب فوریه برای تابع $f$ در فاصله‌ی $(a, b)$ متعلق به $C_p$ مجموعه‌ی یکامتعامد $\phi_n$ در آن فضا باشد از بین ترکیبات خطی توابع $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_N(x)$

ترکیب خطی $C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x) + \ldots + C_N\phi_N(x)$ بهترین تقریب برای متوسط $f(x)$ در فاصله‌ی $a < x < b$ می‌باشد و داریم:

$$E = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} C_n^2 \geq 0$$

«نامساوی بسل»

نکته: برای تقریب یک تابع فقط محدود به سری فوریه نیستیم ولی بین تقریب‌های خطی (بین توابع یکامتعامد) تقریب خطی سری فوریه خطای کمتری دارد.

BERKEH

$$\sum_{n=1}^{N} c_n^2 \leq \|f\|^2$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n \longrightarrow 0$$ شرط همگرایی

قضیه‌ی فوریه: اگر f تابعی باشد که در فاصله‌ی $-\pi<x<\pi$ پیوسته‌ی تکه‌ای و متناوب با دوره‌ی تناوب $2\pi$ باشد، آنگاه سری فوریه‌ی معمولی آن یعنی

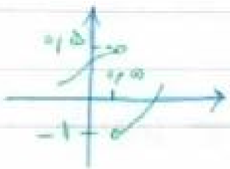
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

که در آن

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad n=0,1,2,\dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad n=1,2,\dots$$

به مقدار متوسط $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ (منظور حدود یک طرفه f در هر $x$) برای $-\infty<x<\infty$ که هردو مشتقات یک طرفه $f_R'(x)$ و $f_L'(x)$ موجود هستند، همگرا می‌شوند.




سری فوریه $= \frac{0/5-1}{2} = -0/25$

* اگر $f(x)$ در $x$ پیوسته باشد (هم چپ و راست) $f(x^+)=f(x^-)=f(x)$ ، و سری فوریه به مقدار خود تابع f همگرا می‌شود.

مشتق راست:

$$f_R'(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0^+ \\ x>x_0}} \frac{f(x)-f(x_0^+)}{x-x_0}$$

مشتق چپ:

$$f_L'(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0^- \\ x<x_0}} \frac{f(x)-f(x_0^-)}{x-x_0}$$

اگر تابعی در نقطه‌ای پیوسته نباشد نمی‌شود برای آن مشتق تعریف کرد ولی می‌شود مشتق چپ و راست را تعریف کرد. حتی ممکن است مشتق چپ و راست برابر شوند ولی به دلیل ناپیوستگی مشتق نداشته باشیم.

**نکته:** ممکن است $f'_L(x_0) = f'_R(x_0)$ ولی $f(x_0)$ پیوسته نباشد؛ در این صورت $f'(x_0)$ وجود ندارد.

**قضیه:** اگر تابع $f$ هموار تکه‌ای در فاصله‌ی $a<x<b$ باشد، آنگاه در هر نقطه‌ی $x_0$ در فاصله‌ی بسته‌ی $a \le x \le b$ مشتقات یکطرفه $f$ در داخل و در نقاط انتها وجود دارند و با حدود یکطرفه‌ی $f'$ برابرند:

$$\begin{cases} f'_R(x_0) = f'(x_0^+) \\ f'_L(x_0) = f'(x_0^-) \end{cases}$$

از تعریف مشتق

**مثال:** یک تابع را به شکل روبه‌رو در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

می‌خواهیم بررسی کنیم اگر $f'_R$ موجود و $f'_L$ موجود و برابر باشند لزوماً $f'(x_0^+)$ و $f'(x_0^-)$ برابر نیستند.

$$f(0^+) = f(0^-) = 0$$

$$f'_R(0) = \lim_{\substack{x \to 0^+ \\ x>0}} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = 0$$

$$f'_L(0) = \lim_{\substack{x \to 0^- \\ x<0}} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = 0$$

$$f'_R(0) = f'_L(0) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) & \text{مبهم} \\ f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) & \text{مبهم} \end{cases}$$

پس $f$ تکه‌ای هموار نیست.

«جلسه‌ی چهارم»

توضیح قضیه بسته بودن دستگاه متعامد:

اگر یک تابع داشته باشیم که نرم مثبت داشته باشد، با مجموعه‌ی توابع مجموعه محور باشد آنگاه: $c_n = \int f(x)\,\Phi_n(x)\,dx$

سری فوریه تعمیم یافته: $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x)$

$$\Phi_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{\|\psi_n(x)\|} = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \qquad \|\psi_n(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \pi$$

برای کسینوس: $\Phi_n(x) = \dfrac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}$

$$\sum c_n \Phi_n(x) = C_0\Phi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n-1}\underbrace{\Phi_{2n-1}(x)}_{\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n}\underbrace{\Phi_{2n}(x)}_{\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}}$$

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum \underbrace{a_n \cos nx}_{C_{2n}\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}} + b_n \sin nx \quad \to a_n = \frac{C_{2n}}{\sqrt{\pi}}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} C_{2n} = \int f(x)\,\Phi_{2n}(x)\,dx = \int f(x)\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\,dx$$

$\frac{a_0}{2} = C_0\Phi_0 = C_0\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow C_0 = \frac{\sqrt{\pi}\,a_0}{2}$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} C_{2n-1} = \int f(x)\,\Phi_{2n-1}(x)\,dx = \int f(x)\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\,dx$$

قضیه‌ی فوریه: سری فوریه در هر نقطه به $\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ همگرا می‌شود.

اثبات:

پیش قضایا یا لم‌ها برای اثبات قضیه فوریه:

لم ۱: اگر تابع $G(u)$ در فاصله‌ی $0<u<\pi$ پیوسته‌ی تکه‌ای باشد داریم:

$$A = \lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi} G(u)\,\overbrace{\sin\left(\frac{2N+1}{2}u\right)}^{\sin\left(Nu+\frac{u}{2}\right)}\,du = 0$$

اثبات لم ۱:

به صورت یک تابع در نظر می‌گیریم.

$$A = \lim_{N\to\infty}\left[\int_0^{\pi} G(u)\sin Nu\cos\frac{u}{2}\,du + \int_0^{\pi} G(u)\cos Nu\sin\frac{u}{2}\,du\right]$$

(۹)

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$b_N = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{G(u)\cos\frac{u}{2}}_{g} \sin Nu\, du$$

چون بازه (π , π-) است و اینجا (π , 0) نوشتیم ضریب ۲ می‌گذاریم.

$b_N$ : ضریب فوریه سینوسی g (پیوسته‌ی تکه‌ای)

$$a_N = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{G(u)\sin\frac{u}{2}}_{g} \cos Nu\, du$$

g هم پیوسته‌ی تکه‌ای چون G پیوسته‌ی تکه‌ای است و sin و cos هم پیوسته‌اند پس g پیوسته‌ی تکه‌ای است

$a_N$ : ضریب فوریه کسینوسی g (پیوسته‌ی تکه‌ای)

چون ضرایب سری فوریه با بزرگ شدن N به سمت صفر میل می‌کند، پس لم ۱ اثبات شد.

لم ۲ :

① $$D_N(u) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos nu \Longrightarrow \begin{cases} \int_0^{\pi} D_N(u)\, du = \frac{\pi}{2} & \text{(الف} \\ D_N(u) = \dfrac{\sin\left((2N+1)\frac{u}{2}\right)}{2\sin\frac{u}{2}} & \text{(ب} \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\, du = \frac{\pi}{2} \qquad \int_0^{\pi} \cos nu\, du = 0$$

اثبات لم ۲:

طرفین رابطه‌ی ① را به $2\sin\frac{u}{2}$ ضرب می‌کنیم:

$$2\sin\frac{u}{2} D_N(u) = \sin\frac{u}{2} + 2\sum_{n=1}^{N} \cos nu \sin\frac{u}{2}$$

نکته: $\{2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\}$

$$\sin\left(\frac{2n+1}{2}u\right) - \sin\left(\frac{2n-1}{2}u\right)$$

$$2\sin\frac{u}{2} D_N(u) = \cancel{\sin\frac{u}{2}} + \cancel{\sin\frac{3}{2}u} - \cancel{\sin\frac{u}{2}} + \sin\frac{5}{2}u - \cancel{\sin\frac{3}{2}u} + \cdots \sin\left(\frac{2N+1}{2}u\right)$$
$$\cancel{-\sin\left(\frac{2N-1}{2}u\right)}$$

$$2\sin\frac{u}{2} D_N(u) = \sin\left(\frac{2N+1}{2}u\right)$$

$$D_N(u) = \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}u\right)}{2\sin\frac{u}{2}}$$

لم ۳: فرض کنید تابع $g(u)$ در فاصله‌ی $0<u<\pi$ پیوسته‌ی تکه‌ای باشد و $g'_R(0)$ موجود باشد آنگاه:

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\pi g(u)D_N(u)\,du=\frac{\pi}{2}g(0^+)$$

$g(u)+g(0^+)-g(0^+)$

اثبات لم ۳:

$$\lim_{N\to\infty}\Big[\underbrace{\int_0^\pi \big(g(u)-g(0^+)\big)D_N(u)\,du}_{I}+\int_0^\pi g(0^+)D_N(u)\,du$$

$$\lim\int_0^\pi \frac{g(u)-g(0^+)}{u-0}\times\frac{\frac{u}{2}\sin(2N+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\,du+g(0^+)\lim_{N\to\infty}\underbrace{\int_0^\pi D_N(u)\,du}_{\frac{\pi}{2}}$$

که باید ثابت شود برابر صفر است تا به $\frac{\pi}{2}g(0^+)$ برسیم

$$\lim_{u\to 0}G(u)=\lim_{u\to 0}\frac{g(u)-g(0^+)}{u-0}\times\frac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}=g'_R(0)\times 1=g'_R(0)$$

$u>0$

پس $G(u)$ پیوسته‌ی تکه‌ای است. رابطه‌ی $I$، ضریب فوریه‌ی سینوسی است که در $N$ های بزرگ

برابر با صفر است. پس لم ۳ هم اثبات شد.

مرحله‌ی آخر: اثبات تئوری فوریه توسط لم های ۱ و ۲ و ۳:

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

$$\lim_{N\to\infty}S_N(x)=\lim_{N\to\infty}\Big[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}a_n\cos nx+b_n\sin nx\Big]$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\cos ns\,ds$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\sin ns\,ds$$

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\,ds$$

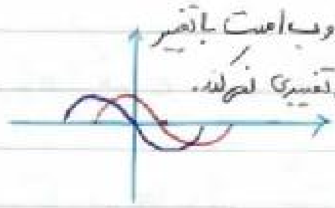
$$\lim_{N\to\infty}\Big[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\,ds+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\cos\big(n(s-x)\big)\,ds$$

با توجه به لم ۲:

$$\lim_{N\to\infty}\Big[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\,ds\underbrace{\Big(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos\big(n(s-x)\big)\Big)}_{D_N(s-x)}\Big]$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

چون تابع متناوب است با تغییر حدود انتگرال تغییری نمی‌کند.



$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)D_N(s-x)\,ds$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(s)D_N(s-x)\,ds$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\left[\int_{x-\pi}^{x} f(s)D_N(s-x)\,ds+\int_{x}^{x+\pi} f(s)D_N(s-x)\,ds\right]$$

$u=x-s \qquad\qquad u=s-x$

$$=\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0}\underbrace{f(x-u)}_{g_1(u)}D_N(u)\,du+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\underbrace{f(x+u)}_{g_2(u)}D_N(u)\,du\right]$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left\{\underline{-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0}g_1(u)D_N(u)\,du}+\underline{\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}g_2(u)D_N(u)\,du}\right\}$$

با توجه به لم ۳: ① $\frac{1}{2}g_1(0^+)=\frac{1}{2}f(x^-)$ ② $\frac{1}{2}g_2(0^+)=\frac{1}{2}f(x^+)$

$$=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

رابطه‌ی ① و ② زمانی برقرار است که توابع $g_1(u)$ و $g_2(u)$ در بازه‌ی $0<u<\pi$ پیوسته‌ی تکه‌ای باشند و در نقطه‌ی صفر دارای مشتق راست. چون $f$ پیوسته‌ی تکه‌ای است، $g_1$ و $g_2$ نیز پیوسته‌ی تکه‌ای خواهند بود.

$$g'_{1R}(0)=\lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}}\frac{g_1(u)-g_1(0^+)}{u-0}=\lim_{u\to 0}\frac{f(x-u)-f(x^-)}{u}=-f'_L(x)$$

$$g'_{2R}(0)=\lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}}\frac{g_2(u)-g_2(0^+)}{u-0}=\lim_{u\to 0}\frac{f(x+u)-f(x^+)}{u}=f'_R(x)$$

داشتیم $\longrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

پس مشتق $g_1$ و $g_2$ در صفر موجود است

مشتق‌های مورد نیاز برای توابع $f$ که در فاصله‌ی $-\pi<x<\pi$ تکه‌ای هموار یا هموار تکه‌ای هستند نداریم؟

Year Month Date ( )

«جلسه ی پنجم»

قضیه ی فوریه برای توابع f که در فاصله ی $-\pi < x < \pi$ تکه ای هموار یا هموار تکه ای هستند به کار می بریم.

اگر F (گسترش تابع F در کل بازه) گسترش متناوب تابع f با دوره تناوب $2\pi$ باشد، مشتقات یک طرفه ی F در هر نقطه در فاصله ی $-\infty < x < \infty$ وجود دارد. یعنی سری فوریه ی F در فاصله ی $-\pi < x < \pi$ به مقدار متوسط حدود یک طرفه ی F همگرا می شود.

**نتیجه :** فرض کنید تابع f پیوسته ی هموار در فاصله ی $-\pi < x < \pi$ باشد و فرض کنید F گسترش متناوب f با دوره ی تناوب $2\pi$، پس برای هر $x$ متعلق به فاصله ی $-\infty < x < +\infty$ سری فوریه
(پیوستگی تکه ای و هموار تکه ای)

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\, dx \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\, dx$$

به مقدار متوسط $\frac{F(x^+) + F(x^-)}{2}$ همگرا می شود.

**تعمیم :** فرض کنید f تابع تکه ای هموار در فاصله ی $-c < x < c$ و متناوب با دوره ی تناوب $2c$ باشد. هم چنین فرض می کنیم f در هر نقطه ی ناپیوستگی حدود یک طرفه $f(x^+)$ و $f(x^-)$ را دارد. سری فوریه ی تابع f به این صورت به دست می آید.

$-\pi < s < \pi$

$x = \frac{cs}{\pi}$

$g(s) = f\left(\frac{cs}{\pi}\right)$

$g(s + 2\pi) = f\left(\frac{c}{\pi}(s + 2\pi)\right) = f\left(\frac{cs}{\pi} + 2c\right) = f\left(\frac{cs}{\pi}\right) = g(s)$ ①

چون ۲c، دوره تناوب f است، پس تغییری ایجاد نمی‌کند.

پس دوره تناوب تابع g، ۲π است.

$$\begin{cases} g(s^+) = f(x^+) \\ g(s^-) = f(x^-) \end{cases}$$

چون f و f' در فاصله‌ی $-c < x < c$ پیوسته‌ی تکه‌ای است. پس g و g' در فاصله‌ی $-\pi < s < \pi$ پیوسته‌ی تکه‌ای خواهد بود.

سری فوریه‌ی تابع $g(s)$:

$$g(s) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos ns + b_n \sin ns$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(s) \cos ns \, ds \ , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(s) \sin ns \, ds \ , \quad n = 1, 2, \dots$$

$$x = \frac{cs}{\pi} \Rightarrow dx = \frac{c}{\pi} ds \Rightarrow ds = \frac{\pi}{c} dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c} g\left(\frac{\pi x}{c}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{c}\right) \frac{\pi}{c} dx = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{c}\right) dx$$

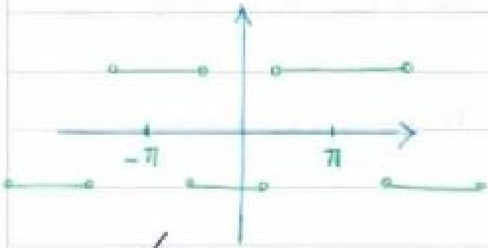
$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c} g\left(\frac{\pi x}{c}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{c}\right) \frac{\pi}{c} dx = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{c}\right) dx$$

ضرایب سری فوریه‌ی جدید ↑ $\qquad n = 1, 2, \dots$

شکل نهایی سری فوریه با این ضرایب:

$$g\left(\frac{\pi}{c} x\right) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{c} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{c} x\right)$$



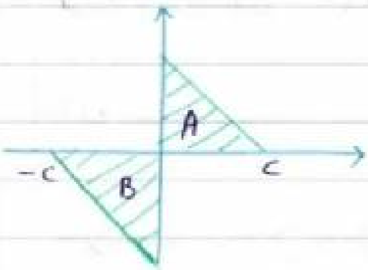

متناوب ، پیوسته‌ی تکه‌ای

برای تمامی $-\infty < x < +\infty$ :

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{c}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{c}\right)$$

$F$ گسترش متناوب $f$ با دوره‌ی تناوب $2c$

نکته: در انتگرال‌گیری توابع زوج ← مثلاً در $2c$ که می‌شود ۲ از $0$ تا $c$. توابع فرد $= 0$.




اگر $f$ زوج باشد $b_n$ صفر و $a_n$ به صورت زیر است:

$$a_n = \frac{2}{c}\int_0^c f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{c} x\right) dx$$

اگر $f$ فرد باشد $a_n$ صفر و $b_n$ به صورت زیر است.

$$b_n = \frac{2}{c}\int_0^c f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{c}\right) dx$$

لم : فرض کنید تابع $f$ در فاصله‌ی $-\pi \leq x \leq \pi$ پیوسته باشد به طوری که $f(\pi) = f(-\pi)$ و

(پیوسته‌ی تکه‌ای ← ناپیوستگی در ابتدا و انتهای بازه مقدار دارد)

$f'$ در فاصله‌ی $-\pi < x < \pi$ پیوسته‌ی تکه‌ای باشد و اگر $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$

و $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$ باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$ همگرا خواهد بود.

**نامساوی بسل:**

$$\sum_{n=1}^{N} C_n^2 \leq \|f\|^2$$

$$\|f\|^2 = \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

$$C_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0 \quad , \quad C_{2n-1} = \sqrt{\pi}\, a_n \quad , \quad C_{2n} = \sqrt{\pi}\, b_n$$

$$\frac{\pi}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi a_n^2 + \pi b_n^2 \leq \|f\|^2$$

Year. Month. Date.

f کراندار است پس نرمش هم کراندار است و سری از این مقدار کراندار و [illegible] است پس کراندار است

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\leq\frac{\|f\|^2}{\pi}$$

چون f تابع پیوسته است پس کراندار است و براساس رابطه‌ی بالا $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ محدود است یعنی

این سری همگرا است.

سری فوریه‌ی مشتق یک تابع: (f تابع تناوبی هموار در $-\pi<x<\pi$)

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f'(x)\,dx}_{dv}\,\overset{u}{\cos nx}=\frac{1}{\pi}\left[f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\right]$$

$$\alpha_n=nb_n$$

$$*\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

$$f(\pi)\cos n\pi-f(-\pi)\cos n\pi$$
$$\cos n\pi\left[\cancel{f(\pi)}-\cancel{f(-\pi)}\right]=0$$

براساس نکته گفته شده، $f(\pi)=f(-\pi)$

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\right]=-na_n$$

$$\begin{cases}\beta_n=-na_n\\ \alpha_n=nb_n\end{cases}$$

$\alpha_n$ و $\beta_n$ ضرایب سری فوریه‌ی $f'$ هستند.

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[f(\pi)-f(-\pi)\right]=0$$

$$f' \text{ سری فوریه‌ی} =\sum_{n=1}^{\infty}n\left(b_n\cos nx-a_n\sin nx\right)$$

Year.  Month.  Date.  (  )

$$S_N = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$$

«جلسه‌ی ششم»

آیا سری فوریه مشتق همگرا است یا نه؟

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2)^{1/2} = \sum_{n=1}^{N} \left( \frac{1}{n^2} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \right)^{1/2}$$

$$S_N^2 = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} (\alpha_n^2 + \beta_n^2)$$

نامساوی کوشی:

$$\left(\sum_{n=1}^{N} P_n q_n\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} P_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{N} q_n^2\right)$$

اثبات نامساوی کوشی:

ضرب داخلی دو بردار

$$(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)^2 = |\vec{V}_1|^2 |\vec{V}_2|^2 \cos^2(\vec{V}_1, \vec{V}_2) \leqslant |\vec{V}_1|^2 |\vec{V}_2|^2$$

$$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{اندازه}} |\vec{V}_1|^2 = \sum_{n=1}^{N} P_n^2$$

$$\vec{V}_2 = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{اندازه}} |\vec{V}_2|^2 = \sum_{n=1}^{N} q_n^2$$

نامساوی کوشی

$$S_N^2 = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \leqslant \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}}_{P_n} \times \underbrace{\sum_{n=1}^{N} (\alpha_n^2 + \beta_n^2)}_{q_n \text{ عدد محدود}}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

چون $\alpha_n$ و $\beta_n$ ضرایب سری فوریه $f'$ هستند پس باید نامساوی بسل را ارضا کند:

$$\sum_{n=1}^{N} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \|f'\|^2$$

برای اینکه عطای سری فوریه هم سو باید ضرایبش همگرا باشد. $\gamma_n \longrightarrow c_n$

اگر شرط $f(\pi) = f(-\pi)$ برقرار نباشد، مشتق سری فوریه یک تابع با سری فوریه مشتق آن برابر نیست.

چون اگر $\pi$ مخالف صفر باشد در مشتق گرفتن هم $\pi$ به وقت ثابت مخالف صفر می‌شود که درست نیست

$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$ سری فوریه‌ی تابع

$\sum \underbrace{-na_n}_{\beta_n} \sin nx + \underbrace{nb_n}_{\alpha_n} \cos nx$ مشتق سری فوریه تابع ②

$\frac{\alpha_0}{2} + \sum \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx$ سری فوریه‌ی مشتق تابع ③

② = ③ اگر $\alpha_0 = 0$ اگر $f(\pi) = f(-\pi)$

همگرایی نقطه‌ای Pointwise Convergence

دنباله‌ای از توابع $f_n$ وجود دارد که به صورت نقطه‌ای به تابع $f$ میل می‌کند:

$f_n \xrightarrow[\text{است}]{\text{همگرایی نقطه‌ای}} f$ iff $\forall t \in [a,b]$ , $f_n(t) \longrightarrow f(t)$ , $n \longrightarrow \infty$

$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ as $n \geq N_\varepsilon(t)$

مثال:

$f_n(x) = \frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

$f_n$ به تابع صفر میل می‌کند (به صورت نقطه‌ای)

$f_n$ می‌تواند به یک تابع هم میل کند نه لزوماً عدد (مثل $x^2$)

تعریف (غیر رسمی):

$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ برای هر $x$ موجود و برابر با یک عدد حقیقی است که فقط تابعی از $x$ می‌باشد.

همگرایی یک شکل Uniform Convergence

$f_n \xrightarrow[\text{است}]{\text{همگرایی یک شکل}} f$ iff (اگر و فقط اگر) $\forall \varepsilon > 0$ (به ازای هر) $\exists N_\varepsilon \in N$ (وجود دارد)

به شرطی که $\forall t$ $\quad n \geq N_\varepsilon \longrightarrow |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$

$\forall t \in [a, b]$

* تفاوت همگرایی یکنواخت و نقطه‌ای در $N_\varepsilon$ است. در همگرایی یکنواخت $N_\varepsilon$ برای همه‌ی مقادیر $t$ یکسان است ولی در همگرایی نقطه‌ای $N_\varepsilon$ تابعی از $t$ است.

← می‌خواهیم نشان دهیم سری فوریه همگرای یکنواخت است

فرض کنید سری $S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ و $a \leq x \leq b$ به $S(x)$ همگرا می‌شود.

یعنی $S(x) = \lim_{N \to \infty} S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$، خطا را بصورت $r_N(x) = S(x) - S_N(x)$ تعریف می‌کنیم. سری $S_N(x)$ بصورت یکنواخت به $S(x)$ همگرا می‌شود اگر بتوان با انتخاب $N$ به اندازه‌ی کافی بزرگ $r_N(x)$ را برای هر $x$ در فاصله‌ی $a \leq x \leq b$ کوچک نمود یعنی برای هر $\varepsilon$ مثبت عدد $N_\varepsilon$ مستقل از $x$ وجود داشته باشد که:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \quad |S(x) - S_N(x)| < \varepsilon$

$N \geq N_\varepsilon \quad (a \leq x \leq b)$

لم: آزمون وایرشتراس M $\quad$ weirestrass M-test

این آزمون برای بررسی همگرایی یکنواخت به کار می‌رود.

اگر سری همگرای $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ و $M_n > 0$ وجود داشته باشد بطوریکه $|f_n(x)| \leq M_n$ (به ازای هر $n$)

آنگاه سری $S_N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ بطور یکنواخت در فاصله‌ی $a \leq x \leq b$ همگرا می‌شود،

یعنی $S(x) = \lim_{N \to \infty} S_N(x) \longleftarrow S(x)$ تابعی پیوسته است.

مثل دنباله‌ها که می‌دانستیم همگرا است بنابراین ثابت می‌کردیم از یک دنباله همگرا کوچکتر است

پس هم می‌توانیم مشتق و انتگرال بگیریم $\rightarrow \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = f(x)$

**قضیه:** اگر شرایط بیان شده در لم قبلی ارضا شود سری $\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$ به طور مطلق و یک‌شکل به $f(x)$ در فاصله‌ی $-\pi \leq x \leq \pi$ همگرا می‌شود.

**اثبات:** شرایط بیان شده ما را مطمئن می‌سازد که گسترش متناوب $f$ روی همه‌ی $x$ها پیوسته است پس سری ذکر شده در هر $x$ در فاصله‌ی $-\pi \leq x \leq \pi$ به $f(x)$ همگرا می‌شود.

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n \cos nx| + |b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n| \leq 2\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

ثابت کنیم همگراست:

$$\frac{a_n + b_n}{2} \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$2a_n b_n + a_n^2 + b_n^2 \leq 4a_n^2 + 4b_n^2$$

$$0 \leq 3a_n^2 + 3b_n^2 - 2a_n b_n$$

$$2a_n^2 + 2b_n^2 + a_n^2 + b_n^2$$

$$0 \leq 2(a_n^2 + b_n^2) + (a_n - b_n)^2$$

مجموع عبارات + همواره نامنفی یا مساوی صفر است

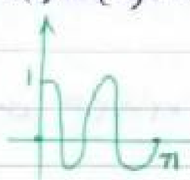
$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq 2\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

چون می‌دانیم سری $2\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ همگراست (از نامساوی بسل) پس طبق آزمون M وایرشتراس پس سری $\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$ به صورت یک‌شکل به $f(x)$ همگرا می‌شود.

**نکته‌ی ۱:** سری فوریه‌ی کسینوسی در $0 < x < \pi$ برای تابع $f$ که در فاصله‌ی $0 \leq x \leq \pi$ پیوسته است به‌طور مطلق و یک‌شکل به $f$ همگرا می‌شود اگر $f'$ در $0 < x < \pi$ پیوسته‌ی تکه‌ای باشد.

برای سری فوریه‌ی سینوسی شرط اضافه $f(0) = f(\pi) = 0$ باید برقرار باشد.

$f = \sum b_n \sin nx$



چون sin در ۰ و $\pi$ صفر می‌شود و اگر f دارای نقاط صفر نشود، سری فوریه f همگرا نشده است

نکته ی ۲: چون همگرایی یکنواخت یک سری با توابع پیوسته به یک تابع پیوسته همگرا می شود، سری فوریه ی f نمی تواند به فاصله ای که شامل یک نقطه ناپیوستگی است به طور یکنواخت همگرا شود.

اگر f پیوسته ی تکه ای باشد در سطح‌های مختلف همگراست ولی در کل یکنواخت نیست.

قضیه: فرض می کنیم تابع f در فاصله ی $-\pi \leq x \leq \pi$ پیوسته است و $f(\pi) = f(-\pi)$ و $f'$ در فاصله ی $-\pi < x < \pi$ پیوسته ی تکه ای است لذا سری فوریه $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$ با ضرایب $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$ و $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx$ قابل مشتق گیری در هر نقطه ی $-\pi < x < \pi$ می باشد، به شرط اینکه $f''$ موجود باشد.

« جلسه ی هفتم »

اثبات: چون $f''$ موجود و $f'$ پیوسته است پس سری فوریه $f'$ عبارت است از:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{\pi} = 0$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx = n b_n$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx = -n a_n$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n b_n \cos nx - n a_n \sin nx)$$

اگر در یک نقطه ی x، $f''$ موجود نباشد ولی $f'$ مشتقات یک طرفه داشته باشد، مشتق گیری هنوز معتبر است و سری $f'$ به مقدار متوسط $f'(x^+)$ و $f'(x^-)$ همگرا می شود.

نکته ی ۱: اگر f در فاصله ی $0 \leq x \leq \pi$ پیوسته باشد و $f'$ در فاصله ی $0 < x < \pi$، پیوسته ی تکه ای، در این صورت سری فوریه کسینوسی f در فاصله ی $0 < x < \pi$ قابل مشتق گیری در نقطه ی x واقع در این

(۱۵)

Year. Month. Date. ( )

نامنظم است که در آن $f''$ موجود باشد.

برای سری فوریه‌ی سینوسی شرط $f(0)=f(\pi)=0$ هم اضافه می‌شود.

قضیه: اگر تابع $f$ در فاصله‌ی $-\pi<x<\pi$ پیوسته‌ی تکه‌ای و از سری فوریه‌ی $f$ همگرا باشد یا نباشد، برای

$-\pi<x<\pi$ رابطه‌ی زیر موجود است: به خاطر این معادله‌ای علم سری فوریه نیست باید چرا

$$\int_{-\pi}^{x} f(s)\,ds=\frac{a_0}{2}(x+\pi)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{a_n\sin nx-b_n\left[\cos nx+(-1)^{n+1}\right]\right\}$$

اثبات:

$$F(x)=\int_{-\pi}^{x} f(s)\,ds-\frac{a_0}{2}x$$

چون $f(s)$ پیوسته است، پس $F(x)$ هم پیوسته خواهد بود.

$$F'(x)=f(x)-\frac{a_0}{2}$$

$F'$ پیوسته‌ی تکه‌ای است.

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx+B_n\sin nx \qquad \int v\,du=vu-\int u\,dv$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{F(s)}_{v}\,\underbrace{\cos ns\,ds}_{du}=\frac{1}{n\pi}\Big[F(s)\sin ns\Big]_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F'(s)\sin ns\,ds$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(f(s)-\frac{a_0}{2}\Big)\sin ns\,ds \Rightarrow A_n=-\frac{b_n}{n}$$

$$\frac{a_0}{2}\cos ns\Big]_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$-\frac{1}{n\pi}\left(\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\sin ns\,ds}_{-\frac{b_n}{n}}-\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\sin ns\,ds}_{\frac{a_0}{2n}\cos ns\Big]_{-\pi}^{\pi}=\frac{a_0}{2n}(\cos n\pi-\cos n\pi)}\right)$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(s)\sin ns\,ds=\frac{a_n}{n}$$

$$F(\pi)=F(-\pi)=\frac{a_0}{2}\pi=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos n\pi+B_n\sin n\pi$$

$$\boxed{F(\pi)=\int_{-\pi}^{\pi}F(s)\,ds-\frac{a_0}{2}\pi=\frac{\pi}{2}a_0}$$

$$\pi a_0$$

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\,ds \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}f(s)\,ds=a_0\pi$$

$$\frac{a_0}{2}\pi = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-b_n}{n}\right)(-1)^n$$

$$\frac{A_0}{2} = \frac{a_0\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{n}\right)(-1)^n$$

$$F(x) = \frac{a_0\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{n}\right)(-1)^n + \sum\left(\frac{-b_n}{n}\cos nx + \frac{a_n}{n}\sin nx\right)$$

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(s)\,ds - \frac{a_0}{2}x$$

$$\int_{-\pi}^{x} f(s)\,ds = \frac{a_0}{2}(x+\pi) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{a_n \sin nx - b_n\left[\cos nx + (-1)^{n+1}\right]\right\}$$

پس انتگرال سری فوریه یک سری فوریه نیست چون در آن $x$ وجود دارد.

- کاربرد قضیه‌ی قبل برای $x \geq x_0$ :

$$\int_{x_0}^{x} f(s)\,d(s) = \int_{-\pi}^{x} f(s)\,ds - \int_{-\pi}^{x_0} f(s)\,ds$$

همگرایی نرمی یا متوسط:

دنباله‌ی $S_N(x)$ $(N=1,2,\dots)$ از توابع پیوسته‌ی تکه‌ای که در بازه‌ی $a<x<b$ تعریف می‌شوند

همگرایی متوسط یا همگرایی نرمی به تابع $f$ دارد در فضای $C_p(a,b)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lim_{N\to\infty}\int_a^b \left[f(x) - S_N(x)\right]^2 dx = 0$$

$$\lim_{N\to\infty}\|f - S_N\| = 0$$

یا

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\; S_N(x) = f(x)$$

limit in mean

- فرض کنید $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} C_n \phi_n(x)$ سری فوریه‌ی تعمیم یافته، جمع جزئی سری فوریه تعمیم یافته، $a<x<b$

اگر شرط $\lim_{N\to\infty}\|f - S_N\| = 0$ به وسیله‌ی هر تابع $f$ در فضای $C_p(a,b)$ یا زیرفضای شامل

دنباله توابع یکا متعامد $\{\phi_n(x)\}$ از فضا S را می گوییم دنباله‌ی یکا متعامد $\{\phi_n\}$ در آن فضا یا زیرفضا کامل است.

اتحاد پارسوال:

وقتی دنباله‌ی $\phi_n(x)$ کامل باشد، اتحاد پارسوال برقرار است:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \qquad \text{Parseval's equation}$$

$$E = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

هر تابع f که معادله‌ی پارسوال را ارضا کند این دنباله $\{\phi_n(x)\}$ کامل است.

«جلسه‌ی هشتم»

تعمیم: شرط لازم و کافی برای اینکه دنباله یکامتعامد $\{\phi_n\}$ کامل باشد آن است که برای هر تابع f در نظر گرفته شده در فضا، معادله‌ی پارسوال:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \phi_n)^2$$

برقرار باشد.

$$(f, \phi_n) = \int_a^b f(x)\, \phi_n(x)\, dx = c_n$$

مثال: فرض کنید توابع یکامتعامد بصورت زیر باشد.

$$-\pi < x < \pi, \quad \{\phi_n\} = \left\{ \phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \phi_{2n-1}(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \phi_{2n} = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\}$$

این مجموعه در فضای $C_p(-\pi, \pi)$ از توابع هموار تکه‌ای کامل است پس اتحاد پارسوال باید برقرار باشد.

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

$$\frac{c_{2n}}{\sqrt{\pi}} = b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$\frac{c_{2n-1}}{\sqrt{\pi}} = a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

برای ساده سازی شدن

$$\frac{a_0}{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$\|f\|^2 = c_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n}^2 + c_{2n-1}^2 = \frac{\pi}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\pi(a_n^2 + b_n^2)$$

$$\frac{1}{\pi}\|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

چون دنباله‌ی $\{\phi_n\}$ کامل است پس $f$ به صورت زیر $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n \sin nx$

به $S_N$ همگرا می‌شود. $S_N = \sum c_n\phi_n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}_{\pi a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx}_{\pi a_n} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx}_{\pi b_n}$$

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx = \pi\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\pi(a_n^2 + b_n^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\|f\|^2 = a_0^2/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

مجموعه‌ی یکا متعامد ارائه شده $\{\phi_n\}$ (که در مثال گفته شد) در فضای توابع $f$ که در فاصله‌ی $-\pi < x < \pi$ پیوسته هستند و $f(\pi) = f(-\pi)$ و $f'$ در فاصله‌ی $-\pi < x < \pi$ پیوسته‌ی تکه‌ای است، کامل می‌باشد.

نکته‌ی ۱: مجموعه‌ی یکا متعامد $\{\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx\}$ در فضای شامل توابع پیوسته‌ی $f$ در بازه‌ی $0 < x < \pi$ که $f'$ پیوسته‌ی تکه‌ای است کامل می‌باشد.

Year. Month. Date. ( )

نکته‌ی ۲: مجموعه‌ی یکامتعامد $\{\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx\}$ در فضای شامل توابع پیوسته‌ی f در بازه‌ی $0 < x < \pi$ که f پیوسته‌ی تکه‌ای است با شرط $f(0) = f(\pi) = 0$ کامل است.

نکته‌ی ۳: معادله‌ی پارسوال برای توابعی که مربعشان روی فاصله‌ی $-\pi < x < \pi$ قابل انتگرال‌گیری است صادق است.

## فصل سوم: The Fourier Method

اگر $u_1$ و $u_2$ متعلق به یک فضای توابع با دامنه‌ی تعریف یکسان داشته باشیم عملگر L یک عملگر خطی است، هرگاه داشته باشیم:

$$L(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 L u_1 + c_2 L u_2$$

خواص عملگر خطی:

1) $L\{u_1 + u_2\} = L\{u_1\} + L\{u_2\}$

2) $L\{c u_1\} = c L\{u_1\}$

3) $L\{0\} = 0$ یا $L\{0\} = L\{0 \cdot 0\} = 0 L\{0\} = 0$

تئوری: اگر n تابع $u_1, u_2, \dots, u_N$ معادله دیفرانسیل خطی همگن $Lu = 0$ را ارضا نمایند، هر ترکیب خطی $u = c_1 u_1 + \dots + c_N u_N$ معادله‌ی $Lu = 0$ را ارضا می‌نماید.

نکته: این تئوری برای شرایط مرزی خطی نیز صادق است.

نکته: فرض کنید توابع $u_n$ طوری هستند که سری $u = \sum c_n u_n$ با ترم‌های $c_n u_n$ به‌ازای دامنه‌ای از متغیرها همگرا می‌شود. در این صورت سری مذکور قابل مشتق‌گیری ترم به ترم نسبت به x است اگر و فقط اگر

$\frac{\partial u_n}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial x}$ موجود باشد و سری $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\partial u_n}{\partial x}$ همگرا به $\frac{\partial u}{\partial x}$ باشد یعنی داشته باشیم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\partial u_n}{\partial x}$$

**قضیه:** هرگاه توابع $u_1$ و $u_2$ و ... و $u_N$ معادله‌ی دیفرانسیل همگن خطی با شرط مرزی همگن خطی $Lu=0$ را ارضا نمایند، آنگاه سری $u=\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$ که $c_n$ ها ثابت هستند، $Lu=0$ را ارضا می‌کند به شرطی که سری همگرا شود، و برای همه‌ی مشتقات در $L$، قابل مشتق‌گیری باشد به شرطی که هر شرط پیوستگی مورد نیاز در مرز به وسیله‌ی $Lu$ در حالتی که $Lu=0$ شرط مرزی است، ارضا شود.

## فصل چهارم:

**مثال ۱:** معادله‌ی دیفرانسیل با شرایط زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = k u_{xx}(x,t) & (0<x<c \quad t>0) & \text{معادله‌ی دیفرانسیل همگن} \\ u_x(0,t) = u_x(c,t) = 0 & (t>0)\ B.C & \text{همگن} \\ u(x,0) = f(x) & (0<x<c)\ I.C & \text{غیرهمگن} \end{cases}$$


مسئله‌ی انتقال حرارت گذرا یک صفحه‌ی

نیم بی نهایت فقط رسانش

«معادله از نوع سهموی است»

حل با استفاده از روش جداسازی متغیرها:

$u(x,t) = X(x)\,T(t)$

$XT' = kX''T$

$\dfrac{T'}{kT} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda^2$

$X'' + \lambda^2 x = 0 \quad ① \longrightarrow X(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x$

$t^2 + \lambda^2 = 0 \longrightarrow t = \pm i\lambda$

$T' + k\lambda^2 T = 0 \quad ② \longrightarrow T = e^{-k\lambda^2 T}$

$u_x = (\lambda A\cos\lambda x - \lambda B\sin\lambda x)\,e^{-k\lambda^2 t}$

$u_x(0,t) = (\lambda A\cos\lambda x)\,e^{-k\lambda^2 t} = 0 \longrightarrow A = 0$

$u_x(c,t) = (\lambda A\cos\lambda c - \lambda B\sin\lambda c)\,e^{-k\lambda^2 t} = 0$

$\hookrightarrow \sin\lambda c = 0$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

$\lambda c = n\pi \Longrightarrow \lambda_n = \dfrac{n\pi}{c}$

$u_n(x,t) = \cos(\lambda_n x)\,e^{-k\lambda_n^2 t}$

// جلسه‌ی نهم //

$u_n(x,t) = \cos(\lambda_n x)\,e^{-k\lambda_n^2 t}$

$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-k\lambda_n^2 t}\cos\left(\dfrac{n\pi x}{c}\right)$

$u(x,0) = f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\dfrac{n\pi}{c}x\right)$

Year. Month. Date. ( )

$$a_n=\frac{2}{c}\int_0^c f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{c}x\right)dx$$

بررسی همگرایی:

$$|a_n u_n| = \left|a_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 t}\cos\left(\frac{n\pi}{c}x\right)\right| \leqslant |a_n| e^{-k\left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 t} \leqslant M e^{-k\left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 t}$$

عدد

با بزرگ شدن $t$، کوچک می شود

$$|a_n| = \frac{2}{c}\left|\int_0^c f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{c}x\right)dx\right| \leqslant \frac{2}{c}\int_0^c \left|f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{c}x\right)\right|dx$$

$$\leqslant \frac{2}{c}\int_0^c |f(x)|\,dx = M$$

نکته: $|a+b| \leqslant |a|+|b|$ اندازه ی جمع > مجموع اندازه ها

$$|u| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n u_n| \leqslant M\sum_{n=0}^{\infty} e^{-k\left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 t}$$

سری $u=\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$ به طور یکنواخت همگراست.

مثال ۲:

$$u_t(x,t) = k u_{xx}(x,t)$$

$u(x,0)=0$ I.C.

$u(0,t)=0$ , $u(\pi,t)=u_0$ B.C.

غیر همگن

شرط مرزی را با استفاده از تغییر متغیر زیر همگن می کنیم:

$$u(x,t) = U(x,t) + \phi(x)$$

$$u(0,t) = U(0,t) + \phi(0) = 0 \longrightarrow \phi(0)=0$$

$U$ به نحوی انتخاب می شود که در مرز ها برابر با صفر باشد.

$$u(\pi,t) = \underbrace{U(\pi,t)}_{0} + \phi(\pi) = u_0 \Longrightarrow \phi(\pi) = u_0$$

$$U_t = k\left[U_{xx} + \phi''\right]$$

الان معادله غیرهمگن شد، پس باید $\phi$ به نحوی انتخاب شود که $\phi''=0$

$$\phi'' = 0 \longrightarrow \phi = Ax + B$$

$$\left.\begin{array}{l} \phi(0) = 0 \longrightarrow B = 0 \\ \phi(\pi) = u_0 \longrightarrow A = \frac{u_0}{\pi} \end{array}\right\} \Longrightarrow \phi(x) = \frac{u_0}{\pi}x$$

$$U_t = k\,U_{xx}$$

$$U(0,t) = U(\pi,t) = 0$$

$$U(x,0) = -\phi(x) = \frac{-u_0}{\pi}x$$

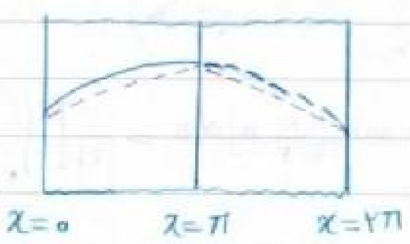
$$u(x,0) = 0 \longrightarrow U(x,0) + \phi(x) = 0$$

معادلات $\longrightarrow$ $\begin{cases} U_t = kU_{xx} \\ U(x,0) = \frac{-u_0}{\pi}x \\ U(0,t) = 0 \ , \ U(\pi,t) = 0 \end{cases}$

برای به دست آوردن $U$ مشابه مثال قبل عمل می‌کنیم، فقط به جای $c$ قرار می‌دهیم $\pi$.

**مثال ۳:**

$$\begin{cases} u_t = k\,u_{xx} \\ \left.\begin{array}{l} u(0,t) = 0 \\ u_x(\pi,t) = 0 \end{array}\right\} B.C. \\ u(x,0) = f(x) \quad I.C. \end{cases}$$




$$X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

$$X(0) = 0 \longrightarrow A = 0$$

Year: Month: Date: ( )

$$X'(\pi)=0 \longrightarrow \lambda B\cos\lambda\pi=0 \longrightarrow B=0$$

چون در $x=\pi$ ، $u_x=0$ ، می‌توان ناحیه را دو برابر کرد با فرض تقارن زوج.

$$\begin{cases} u_t = k\,u_{xx} \\ u(0,t)=0 \\ u(2\pi,t)=0 \\ u(x,0)=F(x)=\begin{cases} f(x) & 0<x<\pi \\ f(2\pi-x) & \pi<x<2\pi \end{cases} \end{cases}$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها :

$$u(x,t)=(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)\,e^{-k\left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 t} \qquad c=2\pi$$

$$u(0,t)=0 \Longrightarrow A=0$$

$$u(2\pi,t)=0 \Longrightarrow B\sin(2\pi\lambda)=0$$

$$\lambda_n=\frac{n\pi}{2\pi}=\frac{n}{2}$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n}{2}x\right)e^{-\frac{kn^2}{4}t}$$

$$u(x,0)=F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\left(\frac{n}{2}x\right)$$

$\tau = 2\pi - x$ ← إذا

$$B_n=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(x)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}f(x)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)dx+\underbrace{\int_{\pi}^{2\pi}f(\overbrace{2\pi-x}^{\tau})\sin\left(\frac{n}{2}x\right)dx}_{A}\right.$$

$$d\tau=-dx$$

$$A=-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0}f(\tau)\sin\left(\frac{n}{2}(2\pi-\tau)\right)d\tau$$

(۲۰)

Year. Month. Date. ( )

$$(-1)^{n+1}\int_0^{\pi} f(\tau)\sin\left(\frac{n}{2}\tau\right)d\tau = -\int_{\pi}^{0} f(\tau)\sin\left(\frac{n}{2}(2\pi-\tau)\right)d\tau$$

$$\sin\left(n\pi-\frac{n\tau}{2}\right) \longrightarrow n \text{ زوج } = -\sin\frac{n\tau}{2}$$

$$\qquad\qquad\qquad \searrow n \text{ فرد } = \sin\frac{n\tau}{2}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\left(1+(-1)^{n+1}\right)\int_0^{\pi} f(x)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)dx$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^{n+1}\right)\left(\int_0^{\pi} f(\tau)\sin\left(\frac{n}{2}\tau\right)d\tau\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)e^{-\frac{kn^2}{4}t}$$

**جلسه‌ی دهم**

$$u(x,t) = \frac{A_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)\cos nx + B_n(t)\sin nx$$ (این توابع [illegible] تعمیم یافته است)

$$u(x,t) = \sum T_n(t)\,X_n(t) \quad , \quad f = \sum C_n\,\Phi_n$$ سری فوریه تعمیم یافته

روش سری فوریه برای بعضی از معادلات قابل استفاده نیست. تعمیم ایده‌های استفاده از سری فوریه منجر به روش

به نام روش جداسازی متغیرها می‌شود. در روش جداسازی ابتدا فضای برداری جواب معادله دیفرانسیل جزئی و شرایط

مرزی را تعیین می‌کنیم سپس با به کارگیری معادله‌ی دیفرانسیل جزئی و شرایط مرزی یک پایه برای این فضای برداری

به دست می‌آوریم، طوری که مشتقات مربوط به مکان را به صورت مضربی از خود تابع مکان به دست می‌دهد.

این روش تحت شرایط زیر قابل اعمال است:

الف) میدان مکان مکعب مستطیل شکل ریالهای آن موازی محورهای مختصات باشد.

ب) معادله دیفرانسیل جزئی خطی و همگن باشد.

ج) شرایط مرزی نیز به صورت خطی و همگن با ضرایب ثابت باشد.

د) در هر جمله‌ی معادله فقط مشتق نسبت به یک متغیر ظاهر شده باشد. به علاوه تابع ضریب از مشتقات

فقط وابسته به متغیر مستقل مشتق گرفته شده باشد و ضریب جز تابع به صورت مجموع دو تابع دو تک متغیره باشد.

مثال:

ترم تولید حرارت

$$\begin{cases} u_t(x,t) = k\,u_{xx}(x,t) + q(t) & 0<x<\pi \quad t>0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

$u_t(x,t) = k u_{xx}(x,t)$

Method of variation of parameters — تغییر پارامتر:

Method of eigen function expansion

$X'' + \lambda^2 X = 0$ — مسأله‌ی همگن نظیر برای تابع مکان

$X_n(x) = A\cos\lambda_n x + B\sin\lambda_n x$ $\qquad \lambda_n \pi = n\pi$

$X_n(0) = 0 \Longrightarrow A = 0 \;,\; X_n(\pi) = B\sin\lambda_n\pi = 0 \qquad \lambda_n = n$

$X_n(x) = B_n(t)\sin nx$

جواب به دست آمده را در معادله‌ی غیر همگن جاگذاری می‌کنیم.

$B_n'(t)\sin nx = -B_n(t)\,n^2 k \sin nx + q(t)$

$B_n'\sin nx + B_n(t)\,n^2 k\sin nx = q(t)$

$f(x)=1$ بسط فوریه‌ی سینوسی تابع ۱ $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[1-(-1)^n]\sin nx}{n\pi}$

در هر رابطه‌ای که دو تا $\sin nx$ ظاهر شدن توان از این ایده استفاده کرد.
(در یک سری ظاهر شود و در بقیه نه)

$$\sin nx\left(B_n' + k n^2 B_n\right) = q\,\underbrace{\frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi}\sin nx}_{=1}$$

$$B_n' + k n^2 B_n = q\,\frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi}$$

یک عامل انتگرال ساز به صورت: $M(t) = e^{\int k n^2 dt} = e^{k n^2 t}$ به طرفین معادله ضرب می کنیم

$$e^{kn^2 t} B_n' + k n^2 e^{kn^2 t} B_n = \frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi}\, q(t)\, e^{kn^2 t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{kn^2 t} B_n\right) = \frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi}\, q(t)\, e^{kn^2 t}$$

$$y' + q(x) = P(x) \qquad , \quad y = e^{-\int q\,dx}\left[\int P(x)\, e^{\int q\,dx}\, dx + c\right]$$

$$\int_0^t d\left(e^{kn^2 t} B_n(t)\right) = \frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi}\int_0^t q(t)\, e^{kn^2 t}\, dt$$

$$e^{kn^2 t} B_n(t) - B_n(0) = \frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi}\int_0^t q(t)\, e^{kn^2 t}\, dt$$

برای به دست آوردن $B_n(0)$ از شرایط اولیه استفاده می کنیم

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin nx$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(0) \sin nx = f(x)$$

$$B_n(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$$

$$B_n(t) = \frac{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx + \frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi}\int_0^t q(\eta)\, e^{kn^2\eta}\, d\eta}{e^{kn^2 t}}$$

«جلسه ی یازدهم»

مثال:

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) = y_{xx}(x,t) + A \sin \omega t & 0<x<1 \ , \ t>0 \\ y(0,t) = y(1,t) = 0 \\ y(x,0) = y_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

حل مسأله‌ی جریان نظیر

$y=\sum X_n(x)\,T_n(t)$

$X\ddot{T}=X''T \longrightarrow \frac{X''}{X}=\frac{\ddot{T}}{T}$

$X''+\lambda^2 X=0 \longrightarrow X=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$

$X(0)=0 \longrightarrow A=0$

$X(1)=0 \longrightarrow \lambda_n=n\pi$

$B_n\sin\lambda_n=0$

$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(t)\sin n\pi x \longrightarrow$ نسبت به زمان دوبار مشتق گرفته می‌شود دوباره معادله را می‌نویسیم

$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ddot{B}_n(t)+(n\pi)^2B_n(t)\right]\sin n\pi x=A\sin\omega t$

به سمت راست رابطه‌ی بالا بسط فوریه‌ی $f(x)=1$ را ضرب می‌کنیم

$1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left[1-(-1)^n\right]\sin(n\pi x)}{n\pi}\quad (0<x<1)$

برای معادلات غیرهمگن که سمت راست‌شان sin یا cos دارد چون با دوبار مشتق گرفتن به خودش می‌رسیم می‌شود جواب خصوصی را مثل خودشان در نظر گرفت

$\ddot{B}_n(t)+(n\pi)^2B_n(t)=A\sin\omega t\;\frac{2\left[1-(-1)^n\right]}{n\pi}$

معادله‌ی مشخصه: $S^2+(n\pi)^2=0 \xrightarrow{\text{جواب عمومی}} B_n(t)=C\sin n\pi t+B\cos n\pi t$

جواب خصوصی: $B_n(t)=D\sin\omega t$

$-\omega^2D+(n\pi)^2D=A\times\frac{2\left[1-(-1)^n\right]}{n\pi}$

$D=\frac{A}{(n\pi)^2-\omega^2}\times\frac{2\left[1-(-1)^n\right]}{n\pi}$

$B_n(t)=C\sin n\pi t+B\cos n\pi t+\frac{A}{(n\pi)^2-\omega^2}\times\frac{2\left[1-(-1)^n\right]}{n\pi}\sin\omega t$

$t=0 \longrightarrow B_n(0)=0 \longrightarrow B=0$

Year. Month. Date. ( )

$$\dot{B}_n(0) = 0 \longrightarrow C(n\pi) + \frac{A}{(n\pi)^2 - w^2} \times \frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi} w = 0$$

$$C = \frac{-Aw}{(n\pi)^2 - w^2} \times \frac{2[1-(-1)^n]}{(n\pi)^2}$$

$$B_n(t) = \frac{2Aw[1-(-1)^n]}{n[(n\pi)^2 - w^2]} \left( \frac{\sin n w t}{w} - \frac{1}{n\pi} \sin w t \right)$$

معادلهٔ اویلر یا کوشی:

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - n^2 R(\rho) = 0$$

$$\rho = e^s \longrightarrow s = \ln \rho$$

$$R'(\rho) = \frac{dR}{ds} \cdot \frac{ds}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dR}{ds} = e^{-s} \frac{dR}{ds} = \frac{dR}{d\rho}$$

$$R''(\rho) = \frac{d^2R}{d\rho^2} = \frac{d}{d\rho}\left(\frac{dR}{d\rho}\right) = \frac{d}{d\rho}\left(e^{-s}\frac{dR}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(e^{-s}\frac{dR}{ds}\right)\frac{ds}{d\rho}$$

$$R''(\rho) = e^{-2s}\frac{d^2R}{ds^2} - e^{-2s}\frac{dR}{ds} = e^{-2s}\left(\frac{d^2R}{ds^2} - \frac{dR}{ds}\right)$$

$$\cancel{e^{2s}} \times \cancel{e^{-2s}} \left(\frac{d^2R}{ds^2} - \cancel{\frac{dR}{ds}}\right) + \cancel{e^{s}} \cdot \cancel{e^{-s}} \cancel{\frac{dR}{ds}} - n^2 R = 0$$

$$\frac{d^2R}{ds^2} - n^2 R = 0$$

$$R(s) = Ae^{ns} + Be^{-ns} = A\rho^n + B\rho^{-n}$$

فصل پنجم: مسائل اشتروم لیوویل و کاربردهایش Strum_Liouville Problems & Application

$$X''(x) + R(x)X'(x) + [Q(x) + \lambda P(x)]X(x) = 0 \quad (1)$$

$R(x), Q(x), P(x)$ معلوم

$X$ مجهول

$$r(x) = e^{\int R(x)dx} \quad ; \quad r'(x) = R(x)\, e^{\int R(x)dx} = R(x)\, r(x)$$

$$p(x) = P(x)\, r(x)$$

$$q(x) = Q(x)\, r(x)$$

طرفین معادله‌ی (۱) را به $r(x)$ ضرب می‌کنیم:

$$r(x) X'' + R(x) r(x) X' + [Q(x) r(x) + \lambda P(x) r(x)] X = 0$$

$$r(x) X'' + r'(x) X' + [q(x) + \lambda p(x)] X = 0$$

$$\left(r(x) X'(x)\right)' + [q(x) + \lambda p(x)] X(x) = 0 \qquad a \leqslant x \leqslant b \qquad (۲)$$

فرم کانونیک مسائل اشتروم - لیوویل

فرض کنیم $r$ و $r'$ توابعی از متغیر حقیقی $x$ هستند که در فاصله‌ی بسته‌ی $a \leqslant x \leqslant b$ پیوسته هستند و برای همه‌ی مقادیر $x$ در این بازه $r(x), p(x) > 0$ و نیز $X(x)$ شرایط مرزی زیر را ارضا می‌نماید.

$$\begin{cases} a_1 X(a) + a_2 X'(a) = 0 \\ b_1 X(b) + b_2 X'(b) = 0 \end{cases} \qquad (۳)$$

شرط مرزی دیریکله

که در آن $a_1$ و $a_2$ و نیز $b_1$ و $b_2$ هر دو باهم صفر نیستند. و هم چنین $a_1$ و $a_2$ و $b_1$ و $b_2$ اعداد حقیقی غیر وابسته به $\lambda$ هستند.

معادلات (۲) و (۳) یک مسأله‌ی اشتروم - لیوویل منظم را تشکیل می‌دهند که در آن $\lambda$ مقدار ویژه‌ی مسأله است و $X(x)$ یک تابع ویژه می‌باشد.

برای اینکه $X(x)$ تابع ویژه باشد، $X'(x)$ و $X''(x)$ باید در فاصله‌ی $a \le x \le b$ پیوسته باشد.

مقادیر ویژه‌ی معادلات (۲) و (۳) را اسپکتروم مسأله می‌نامند. ضمناً مقادیر ویژه حقیقی هستند.

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$$

قبلاً گفتیم $X'' + \lambda^2 X = 0$ یک مسأله‌ی اشتروم-لیوویل است در $0 \le x \le C$ که $\lambda$ مقدار ویژه‌ی آن است.

$X'(0) = X(C) = 0$

(مثال اول فصل قبل)

اپراتور (عملگر) $L$:

$$L[X(x)] = [r(x)X'(x)]' + q(x)X(x)$$

مسأله‌ی $S\_L$: $\quad L[X(x)] + \lambda P X(x) = 0$

$$L[X(x)] = A(x)X''(x) + B(x)X'(x) + C(x)X(x)$$

$$L^*[X(x)] = [A(x)X(x)]'' - [B(x)X(x)]' + C(x)X(x)$$

عملگر الحاقی: عملگر adjoint عملگر $L$

«جلسه‌ی دوازدهم»

اگر $L = L^*$ عملگر را خودالحاقی می‌گویند. self_adjoint

شرط لازم و کافی برای اینکه $L$، self adjoint باشد: $\quad A' = B$

اثبات:

$$L^* = L \Rightarrow (A'X + AX')' - (B'X + BX') + CX = AX'' + BX' + CX$$

$$\cancel{AX''} + 2A'X' + A''X - B'X - BX' + \cancel{CX} = \cancel{AX''} + BX' + \cancel{CX}$$

پس باید $A' = B$ شود تا عملگر خودالحاق باشد. $(A''-B')X = -2(A'-B)X'$

اگر ضرایب دو طرف مساوی صفر باشد مشتق و لزوم بودن ...
و شرط دو طرف با هم برابرند

$r = A$

$r' = A' = B$

عملگر خودالحاق $L = rX'' + r'X' + qX$

هرگاه حرف از شرایط منظم بودن مسئله اشتروم لیوویل ارضا نشود مسئله تکین نامیده می شود. به عنوان مثال اگر $q(x)$ در یک نقطه ی انتهایی فاصله ی $a<x<b$ حدی نهایت داشته باشد مسأله تکین نامیده می شود. یا هرگاه توابع $r$ و $p$ در یک نقطه ی انتهایی بازه صفر فرض شود آنگاه مسأله تکین است.
اگر $r(x)$ در یک نقطه صفر شود شرط مرزی در آن نقطه را حذف می کنیم.

به عنوان مثال: معادله ی روبه رو:

$$[xX'(x)]' + \left(\frac{-n^2}{x} + \lambda x\right)X(x) = 0$$

$0<x<c$ , $X(c) = 0$

مساله ی اشتروم لیوویل تکین

$q(x) = \frac{-n^2}{x}$ $\quad r(x) = x$ $\quad x \to 0 \quad q \to \infty$

$x = 0 \quad r(0) = 0$

شرایط مرزی متناوب:

$$\begin{cases} X(a) = X(b) \\ X'(a) = X'(b) \end{cases}$$

مجموعه ی $\{\psi_n(x)\}_{n=1,2,\dots}$ نسبت به تابع وزنی $P(x)$ در فاصله ی $a<x<b$ متعامد است.

هرگاه $m \neq n$, $\int_a^b P(x)\,\psi_m(x)\psi_n(x) = 0$

$$\|\psi_n\|^2 = (\psi_n, \psi_n) = \int_a^b P(x)\,[\psi_n(x)]^2\,dx$$

$$\phi_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{\|\psi_n(x)\|} \qquad f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} C_n \phi_n(x)$$

$$C_n = (f, \phi_n) = \int_a^b P(x)\,f(x)\,\phi_n(x)\,dx$$

**قضیه:** اگر $\lambda_n$ و $\lambda_m$ مقادیر ویژه‌ی مسأله اشتورم - لیوویل زیر باشند و $X_n(x)$ و $X_m(x)$ توابع ویژه‌ی نظیر $\lambda_n$ و $\lambda_m$ باشند، در این صورت $X_n$ و $X_m$ نسبت به تابع وزنی $P(x)$ در بازه‌ی $a \leq x \leq b$ متعامد هستند

اگر:

$$\begin{cases} [r(x)X'(x)]' + [q(x) + \lambda P(x)]X(x) = 0 & ① \\ a_1 X(a) + a_2 X'(a) = 0 & ② \\ b_1 X(b) + b_2 X'(b) = 0 & ③ \end{cases}$$

شرط تعامد در شرایط زیر نیز برقرار است:

الف: اگر $r(a)=0$، رابطه‌ی ② حذف شود.

ب: اگر $r(b)=0$، رابطه‌ی ③ حذف شود.

ج: اگر $r(a)=r(b)$، به‌جای روابط ② و ③ باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} X(a) = X(b) \\ X'(a) = X'(b) \end{cases}$$

$X_n$ و $X_m$ را در معادله‌ی ① قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} \left[(rX_m')' + qX_m = -\lambda_m P X_m\right] \times X_n \\ \left[(rX_n')' + qX_n = -\lambda_n P X_n\right] \times X_m \end{cases}$$

$$X_m(rX_n')' - X_n(rX_m')' = (\lambda_m - \lambda_n) P X_m X_n$$

$$\frac{d}{dx}\left[r(X_m X_n' - X_m' X_n)\right] = (\lambda_m - \lambda_n) P X_m X_n$$

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b P(x) X_m(x) X_n(x)\,dx = \Big[\underbrace{r(X_m X_n' - X_m' X_n)}_{A}\Big]_a^b \quad ***$$

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} X_m(x) & X'_m(x) \\ X_n(x) & X'_n(x) \end{vmatrix} = X_m(x)\,X'_n(x) - X'_m(x)\,X_n(x)$$

$$A = r(b)\,\Delta(b) - r(a)\,\Delta(a)$$

حالت الف:

$$\begin{cases} b_1 X_m(b) + b_2 X'_m(b) = 0 \\ b_1 X_n(b) + b_2 X'_n(b) = 0 \end{cases}$$

اگر $b_1$ و $b_2$ همزمان صفر نباشند، باید:

$$\Delta(b) = \begin{vmatrix} X_m(b) & X'_m(b) \\ X_n(b) & X'_n(b) \end{vmatrix} = 0$$

اگر $r(a)=0$ و $\Delta(b)=0 \Longrightarrow \int_a^b P X_m X_n \, dx = 0$

حالت ب:

اگر $r(b)=0$ باید $\Delta(a)=0 \Longrightarrow \int_a^b P X_m X_n \, dx = 0$

حالت ج:

اگر $r(a)=r(b)$ باید $\Delta(a)=\Delta(b) \Longrightarrow \int_a^b P X_m X_n \, dx = 0$

قضیه: اگر $\lambda$ مقدار ویژه ی مسأله ی اشتروم - لیوویل با معادلات ۱و۲و۳ باشد آنگاه $\lambda$ باید حقیقی باشد. این ویژگی برای حالت های الف و ب و ج نیز برقرار است.

برای اثبات فرض کنید $\lambda$، موهومی است:

$\lambda = \alpha + \beta i \longrightarrow X$ تغییر تابع ویژه ی

چون ضرایب معادلهٔ اشتورم لیوویل حقیقی هستند تابع ویژهٔ

$\bar{\lambda} = \alpha - \beta i \longrightarrow \bar{X}$ تابع ویژهٔ متغیر

$(r\bar{X}')' + [q + \bar{\lambda} P(x)]\bar{X} = 0$

متناظر $\bar{\lambda}$ ، $\bar{X}$ خواهد بود.

$X = u + iv \qquad \lambda = \alpha + i\beta$

$\bar{X} = u - iv \qquad \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$

$(r(u+iv)')' + [q + (\alpha + \beta i)P](u+iv) = 0$

$(r(u)')' + [q + (\alpha)P]u = 0$

$(r(v)')' + [q + (\beta)P]v = 0$

$$\begin{cases} a_1 \bar{X}(a) + a_2 \bar{X}'(a) = 0 \\ b_1 \bar{X}(b) + b_2 \bar{X}'(b) = 0 \end{cases}$$

چون $\lambda \neq \bar{\lambda} \Longrightarrow \int_a^b \underbrace{P(x)}_{P(x)>0} \underbrace{X\bar{X}}_{|X|^2 > 0} dx = 0$

چون $P>0$ و $|x|^2 > 0$ پس این تساوی برقرار نیست و فرض اولیه غلط است در نتیجه $\lambda$ باید حقیقی باشد.

لم: اگر $A$ و $B$ و $C$ توابع پیوسته‌ای از $x$ در فاصلهٔ $a \leq x \leq b$ باشد و اگر $x_0$ یک نقطهٔ ثابت در فاصلهٔ مورد نظر باشد و $y_0$ و $y'_0$ ثوابت معین باشند، آنگاه فقط و فقط یک تابع $y$ در فاصلهٔ $a \leq x \leq b$ وجود دارد که معادلهٔ $y''(x) + A(x)y'(x) + B(x)y(x) = C(x)$ را با شرایط

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

ارضا می‌کند.

با استفاده از این لم می‌خواهیم اثبات کنیم که متناظر یک مقدار ویژه تنها یک تابع ویژهٔ مستقل وجود دارد به عنوان مثال اگر $X$ و $Y$ توابع ویژهٔ متناظر با مقدار ویژهٔ $\lambda$ باشند، $X$ و $Y$ مستقل از یکدیگر نخواهند بود بلکه $Y$ برابر با حاصلضرب $X$ در یک عدد ثابت است.

«جلسهٔ سیزدهم»

** ادامهٔ صفحهٔ قبل:

$$① \; r(X_m X'_n - X'_m X_n)\Big]_a^b = r(b)\underbrace{\big(X_m(b)X'_n(b) - X'_m(b)X_n(b)\big)}_{\Delta(b)} - r(a)\underbrace{\big(X_m(a)X'_n(a) - X'_m(a)X_n(a)\big)}_{\Delta(a)}$$

Year. Month. Date. ( )

$$\left.\begin{cases} b_1 X_m(b) + b_2 X_m'(b) = 0 \rightsquigarrow X_m(b) = -\dfrac{b_2}{b_1} X_m'(b) \\ b_1 X_n(b) + b_2 X_n'(b) = 0 \longrightarrow X_n'(b) = -\dfrac{b_1}{b_2} X_n(b) \end{cases}\right\} X_m(b) X_n'(b) = X_m'(b) X_n(b) \Rightarrow \Delta(b) = 0$$

$$\begin{cases} a_1 X_m(a) + a_2 X_m'(a) = 0 \\ a_1 X_n(a) + a_2 X_n'(a) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \Delta(a) = 0$$

چون رابطه‌ی ① $=0$ $\longleftarrow$ $\int_a^b P(x) X_n(x) X_m(x)\, dx = 0$

یعنی $X_m$ و $X_n$ نسبت به تابع وزن $P(x)$ بر هم عمودند.

استفاده از لم در اثبات:

$$\begin{cases} (r X')' + (q + \lambda P) X = 0 \\ a_1 X(a) + a_2 X'(a) = 0 \\ b_1 X(b) + b_2 X'(b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r(Y')' + (q + \lambda P) Y = 0 \\ a_1 Y(a) + a_2 Y'(a) = 0 \\ b_1 Y(b) + b_2 Y'(b) = 0 \end{cases}$$

اگر $a_1$ و $a_2$ غیر صفر باشند:

$$\begin{vmatrix} X(a) & X'(a) \\ Y(a) & Y'(a) \end{vmatrix} = X(a) Y'(a) - X'(a) Y(a) = 0 \rightsquigarrow \boxed{Z(a) = 0}$$

$$Z(x) = Y'(x)X(x) - X'(x)Y(x)$$

$$\boxed{Z'(a) = 0}$$

$p, q, r, r' \longrightarrow$ پیوسته هستند $a \leq x \leq b$ برروی بازه‌ی و $p(x), r(x) > 0$

به راحتی می‌توان نشان داد $Z$ در دستگاه اشتورم لیوویل صدق می‌کند

$$(rZ')' + (q + \lambda p)Z = 0$$

براساس لم گفته شده این معادله یک جواب یکتا دارد که $Z(x) = 0$ است. چون $Z(x) = 0$ جواب بدیهی معادله است و
معادله فقط یک جواب دارد پس جواب معادله فقط $Z(x) = 0$ است

$$Y'(a)X(x) - X'(a)Y(x) = 0$$

$$\Rightarrow Y(x) = \frac{Y'(a)}{X'(a)} X(x) = CX(x)$$

به عبارت دیگر $Y$ مستقل از $X$ نخواهد بود. اما اگر فرض شود $X'(a)$ و $Y'(a)$ هر دو به طور همزمان صفر باشند در
این صورت باید $X(a)$ و $Y(a)$ نیز صفر باشند. در این صورت شرایط لم قبل برای توابع ویژه‌ی $X(x), Y(x)$
برقرار بوده و این دو تابع همواره باید صفر باشند که امکان پذیر نیست.

اگر $\lambda$ حقیقی و تابع ویژه‌ی نظیر آن موهومی باشد: $\lambda \longrightarrow X = u + iv$

$$\left.\begin{array}{l}(ru')' + (q + \lambda p)u = 0 \\ (rv')' + (q + \lambda p)v = 0\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{قبلی}]{\text{طبق قضیه}} v = \beta u$$

$X = u + i\beta u \Longrightarrow X = u(1 + i\beta)$ درصورتی که تابع ویژه موهومی باشد می‌توان آن را برحسب یک تابع حقیقی با یک ضریب مشخص نوشت.

$$u = \frac{1}{1 + i\beta} X$$

لم: اگر $\lambda$ یک مقدار ویژه‌ی مسأله‌ی اشتورم لیوویل منظم باشد و $a_1 a_2 \leq 0$ ، $b_1 b_2 \geq 0$ ( $a \leq x \leq b$ ) $q \leq 0$ و $q \leq 0$ آنگاه $\lambda \geq 0$ است.

اثبات:

$$(rX')' + (q + \lambda p)X = 0 \xrightarrow[\text{می‌شوند و از همه عبارت‌های معادله انتگرال می‌گیریم.}]{\text{طرفین به } X \text{ ضرب}} \overbrace{\int_a^b \underbrace{X}_{u} \underbrace{(rX')'dx}_{dv}}^{I} + \underbrace{\int_a^b qX^2dx}_{\leq 0} + \underbrace{\lambda\int_a^b pX^2dx}_{\geq 0} = 0$$

در مسأله‌ی اشتورم-لیوویل منظم ، $r(x), p(x) > 0$

$$I = XrX'\Big|_a^b - \underbrace{\int_a^b r(X')^2dx}_{\geq 0}$$

(۲)

$$\underbrace{\lambda\int_a^b pX^2dx}_{\geq 0} = \underbrace{-\int_a^b qX^2dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_a^b rX'^2dx}_{\geq 0} + \underbrace{r\left[X(a)X'(a) - X(b)X'(b)\right]}_{\geq 0}$$

اگر $a_1 = 0$ یا $a_2 = 0 \Longleftarrow X'(a) = 0$ یا $X(a) = 0$

$$r(a)X(a)X'(a) = 0$$

اگر $a_1 \neq 0$ و $a_2 \neq 0 \Longleftarrow$

$$a_1 X(a) = -a_2 X'(a)$$

$$\Rightarrow r(a)X(a)X'(a) = -r(a)\left[X'(a)\right]^2\frac{a_2}{a_1}$$

چون $a_1 a_2 \leq 0 \Longleftarrow \frac{a_2}{a_1} \leq 0$

$$\Rightarrow -r(a)\left[X'(a)\right]^2\frac{a_2}{a_1} \geq 0$$

$$\Rightarrow r(a)X(a)X'(a) \geq 0$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد:

$$r(b)X(b)X'(b) \leq 0$$

Year. Month. Date. ( )

چون طرف راست رابطه‌ی ② همواره مثبت است، پس باید $\lambda \geq 0$ باشد.

**مثال:**

$$\begin{cases} (xX')' + \dfrac{\lambda}{x} X = 0 \quad , \quad 1 < x < b \\ X(1) = 0 \longrightarrow a_1 = 1 , a_2 = 0 \\ X(b) = 0 \longrightarrow b_1 = 1 , b_2 = 0 \end{cases}$$

این دستگاه، یک مسأله‌ی اشتورم-لیوویل است.

$$\begin{cases} r(x) = x \\ q(x) = 0 \\ p(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$xX'' + X' + \frac{\lambda}{x} X = 0$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به } x \text{ ضرب می‌شود}} x^2 X'' + xX' + \lambda X = 0$$

براساس لم قبلی، حتماً $\lambda > 0$.

← درصورتی که $\lambda = 0$ باشد جواب معادله شرایط مرزی را ارضا نمی‌کند (دراین مورد چک کنید)

$\lambda = \alpha^2$

معادله‌ی اویلر، متشابه معادله‌ی: $x = e^s \longrightarrow \ln x = s$

$$\frac{d^2X}{ds^2} + \alpha^2 X = 0$$

$$t + \alpha^2 = 0 \longrightarrow X(x) = A\sin(\alpha s) + B\cos(\alpha s) = A\sin(\alpha \ln x) + B\cos(\alpha \ln x)$$

شرایط مرزی: $X(1) = 0 \Longrightarrow B = 0$

$$X(b) = 0 \Longrightarrow A\sin(\alpha \ln b) = 0 \Longrightarrow \alpha_n \ln b = n\pi \Longrightarrow \alpha_n = \frac{n\pi}{\ln b}$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ln b}\right)^2 \longrightarrow X_n = \sin\left(n\pi \frac{\ln x}{\ln b}\right)$$

مقدار ویژه‌ی مسأله    تابع ویژه‌ی نظیر

«جلسه‌ی چهاردهم»

* معادلات اشتورم - لیوویل، در واقع معادلات تولیدکننده‌ی توابع متعامد هستند.

$$\|X_n\|^2 = \int_1^b P(x)\, X_n^2\, dx$$

برای مثال قبل داریم:

$$= \int_1^b \frac{1}{x} \sin^2\left(\frac{n\pi}{\ln b} \ln x\right) dx$$

$$= \int_1^b \frac{1}{x} \sin^2(\alpha_n \ln x)\, dx$$

$$\left.\begin{aligned} \ln x &= s \\ \frac{dx}{x} &= ds \end{aligned}\right\} \longrightarrow = \int_0^{\ln b} \sin^2(\alpha_n s)\, ds = \frac{\ln b}{2}$$

$$\|X_n\| = \sqrt{\frac{\ln b}{2}} \qquad ; \Phi_n(x) = \frac{X_n}{\|X_n\|} = \frac{\sin(\alpha_n \ln x)}{\sqrt{\frac{\ln b}{2}}}$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} C_n \Phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ln b}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ln b} \ln x\right)$$

$$C_n = (f, \phi_n) = \int_1^b P(x) f(x)\, \Phi_n(x)\, dx$$

$$= \int_1^b \frac{1}{x} f(x) \sqrt{\frac{2}{\ln b}} \sin(\alpha_n \ln x)\, dx$$

مثال:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) & \\ u_x(0,t) = 0 \;,\; u(\pi,t) = t & \text{B.C.} \\ u(x,0) = 0 & \text{I.C.} \end{cases}$$

غیرهمگن

برای همگن‌سازی شرایط مرزی:

$$U(x,t) = u(x,t) - t$$

Year. Month. Date. ( )

$$\begin{cases} U_x(0,t)=0 \\ U(\pi,t)=0 \end{cases}$$

$U_t+1=U_{xx}$ معادله جدید به این شکل خواهد شد:

$U(x,t)=X(x)\,T(t)$

$X\dot{T}+1=X''T$

حالت همگن نظیر را ابتدا حل می‌کنیم:

$X\dot{T}=X''T$ براساس لم قبلی $\lambda=\alpha^2$.

$$\begin{cases} X''+\alpha^2X=0 \\ \dot{T}+\alpha^2T=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} r(x)=1 \\ q(x)=0 \\ P(x)=1 \end{cases}$$ معادله اشترم-لیوویل

توابع متعامد بر حسب $\phi$ = سری فوریه کسینوسی

$X_n(x)=A_n\cos\alpha_n x$

$X(x)=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x$

$X'(0)=0 \longrightarrow B=0 \quad , \quad X_n(x)=A_n\cos\alpha_n x$

$U(\pi,t)=0 \longrightarrow A\cos\alpha\pi=0 \longrightarrow \alpha\pi=\frac{(2n-1)\pi}{2} \longrightarrow \alpha=\frac{2n-1}{2}$

$\lambda_n=\alpha_n^2=\frac{(2n-1)^2}{4}$ مقدار ویژه:

$U_n(x,t)=A_n(t)\cos\alpha_n x$

$\dot{A}_n(t)\cos(\alpha_n x)+1=-(\alpha_n)^2A_n(t)\cos(\alpha_n x)$

$\left[\dot{A}_n(t)+(\alpha_n)^2A_n(t)\right]\cos(\alpha_n x)=-1$ ①

سری فوریه ی کسینوسی $f(x)=1$

$$1=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\alpha_n}\cos\alpha_n x$$

جایگذاری در ①:

$$\dot{A}_n(t)-\alpha_n^2 A_n(t)=-\frac{2}{\pi}\frac{\sin(\alpha_n\pi)}{\alpha_n}$$

$$\sin\alpha_n\pi=(-1)^{n+1}$$

$$U(x,0)=0 \;\Rightarrow\; A_n(0)=0$$

$$\longrightarrow U_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)\cos\alpha_n x$$

$$u=U+t$$

مثال: تغییر شکل سیم الاستیک را رهایی آویزان است:

$$\begin{cases} y_{tt}=a^2y_{xx}+g & (0<x<c)\,,\,t>0 \\ y(0,t)=0 \;;\; y_x(c,t)=0 & \text{B.C.} \\ y(x,0)=0 \;;\; y_t(x,0)=0 & \text{I.C.} \end{cases}$$

ابتدا معادله ی همگن نظیر:

$$y(x,t)=X(x)\,T(t)$$

$$X\ddot{T}=a^2X''T \longrightarrow \begin{cases} X''+\alpha^2X=0 \\ \ddot{T}+\alpha^2a^2T=0 \end{cases}$$

$$X_n(x)=A_n\sin\alpha_n x+B_n\cos\alpha_n x$$

$$X_n(0)=0 \longrightarrow B_n=0$$

$$X'_n(c)=0 \longrightarrow \alpha_n A_n\cos\alpha_n c=0 \longrightarrow \alpha_n c=\frac{2n-1}{2}\pi$$

$$\longrightarrow \alpha_n=\frac{2n-1}{2c}\pi$$

(۲۹)

$$X_n(x) = A_n \sin\left(\frac{2n-1}{2c}\pi x\right) = A_n \sin(\alpha_n x)$$

$$y_n(x,t) = A_n(t)\sin(\alpha_n x)$$

$$\left(\ddot{A}_n(t) + \alpha_n^2 a^2 A_n(t)\right)\sin \alpha_n x = g \times 1$$

$$1 = \frac{2}{c}\sum \frac{\sin \alpha_n x}{\alpha_n}$$ بسط سری فوریه‌ی سینوسی در $(-c ، c)$

$$\ddot{A}_n(t) + \alpha_n^2 a^2 A(t) = \frac{2g}{\alpha_n c}$$ معادله دیفرانسیل ناهمگن

جواب عمومی : $$A_n(t) = F\cos(\alpha_n a t) + G\sin(\alpha_n a t)$$

جواب خصوصی: $$A_n(t) = \frac{2g}{\alpha_n^3 a^2 c} \longleftarrow A_n(t) = kg$$

$$\alpha_n^2 a^2 kg = \frac{2g}{\alpha_n c} \Longrightarrow k = \frac{2}{\alpha_n^3 a^2 c}$$

$$y(x,0) = 0 \longrightarrow F + \frac{2g}{\alpha_n^3 a^2 c} = 0 \longrightarrow F = -\frac{2g}{\alpha_n^3 a^2 c}$$

$$y_t(x,0) = 0 \longrightarrow G = 0$$

$$A_n(t) = \frac{2g}{c a^2 \alpha_n^3}\left(1 - \cos(\alpha_n a t)\right)$$

$$y(x,t) = \frac{2g}{c a^2}\sum \frac{(1-\cos \alpha_n a t)\sin \alpha_n x}{\alpha_n^3}$$

«جلسه‌ی پانزدهم»

فصل ششم: انتگرال فوریه و کاربردهایش

سری فوریه‌ی تابع $f(x)$ در $-c < x < c$

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(s)\,ds + \frac{1}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-c}^{c} f(s)\cos\left[\frac{n\pi}{c}(s-x)\right]ds$$ ①

اگر $f$ هموار تکه‌ای در فاصله‌ی $-c < x < c$ باشد در نقاط ناپیوستگی خود متوسط حدود $f(x^+)$ و $f(x^-)$

وا داشته باشد آنگاه سری به $f(x)$ همگرا می شود.

اگر تابع $f(x)$ متناوب با دوره ی تناوب $2c$ نباشد سری فقط در بازه ی $-c<x<c$ صادق است.

در صورت متناوب بودن تابع $f(x)$ با دوره ی تناوب $2c$ سری فوریه برروی همه ی مقادیر $x$ صادق است.

انتگرال فوریه :

اگر فرض کنیم $\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,ds$ موجود باشد :

$$① \ \frac{1}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-c}^{c} f(s)\cos\left(\frac{n\pi}{c}(s-x)\right)ds$$

$$\Delta\alpha = \frac{\pi}{c} \ , \ \frac{1}{c} = \frac{\Delta\alpha}{\pi}$$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\alpha\underbrace{\int_{-c}^{c} f(s)\cos[n\Delta\alpha(s-x)]\,ds}_{F_c(n\Delta\alpha, x)}$$

$$n\Delta\alpha = \alpha$$

$$F_c(n\Delta\alpha, x) = F_c(\alpha, x) = \int_{-c}^{c} f(s)\cos[\alpha(s-x)]\,ds$$

$$c \longrightarrow \infty \ , \ \Delta\alpha \longrightarrow 0$$

$$\lim_{c\to\infty}\frac{1}{c}\sum_{n=1}^{\infty} f(s)\cos\left[\frac{n\pi}{c}(s-x)\right]ds = \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\pi}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}}_{\text{انتگرال}}\underbrace{(\Delta\alpha)}_{d\alpha}F_c(\underbrace{n\Delta\alpha}_{\alpha}, x)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} F_c(\alpha, x)\,d\alpha$$

چون $\Delta\alpha \to 0$ ، می توان $\Sigma$ را به $\int$ تبدیل کرد

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\cos\left(\alpha(s-x)\right)ds}_{F_c(\alpha, x)}\Big]d\alpha$$

$$\cos\alpha(s-x) = \cos\alpha s\cos\alpha x + \sin\alpha s\sin\alpha x$$

انتگرال فوریه ی تابع $f(x)$ :

$$f(x) = \int_0^\infty \left[A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x\right] d\alpha$$

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cos\alpha s\, ds$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\sin\alpha s\, ds$$

می خواهیم نشان دهیم $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ به یک عدد محدود است. (در ادامه از این انتگرال استفاده خواهد شد).

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{C\to\infty}\int_0^C \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{C\to\infty}\left[\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx + \underbrace{\int_1^C \frac{\sin x}{x}\, dx}_{\text{یک عدد محدود}}\right]$$

انتگرال نامعین:

$$\int \frac{\sin x}{x}\, dx = -\frac{\cos x}{x} + \int \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

$$\begin{cases} \sin x\, dx = du \\ \frac{1}{x} = v \end{cases} \qquad \int v\,du = vu - \int u\,dv$$

$$\lim_{C\to\infty}\int_1^C \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{C\to\infty}\left[\underbrace{\frac{-\cos C}{C}}_{\to 0,\ C\to\infty} + \cos 1 - \underbrace{\overbrace{\int_1^C \frac{\cos x}{x^2}\, dx}^{①}}_{\text{یک عدد محدود}}\right]$$

?

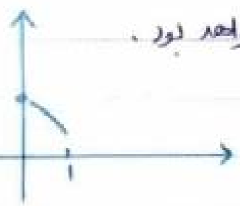
①

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \left|\frac{1}{x^2}\right|$$

$$\Longrightarrow \int_1^C \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx \leqslant \int_1^C \left|\frac{1}{x^2}\right| dx$$

$$= -\underbrace{\left(\frac{1}{C} - 1\right)}_{A} \quad \text{یک عدد محدود} \quad C\to\infty \quad A\to 1$$

چون $\frac{\sin x}{x} \to 1$ و $x \to 0$ پس $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$ یک عدد محدود خواهد بود.



اکنون می‌خواهیم مقدار $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ را بدست آوریم.

$$\lim_{c\to\infty}\int_0^c \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_0^\pi \frac{\sin(2N+1)\frac{u}{2}}{\frac{2N+1}{2}u}\,\frac{(2N+1)}{2}\,du$$

$$\left.\begin{array}{l} x=(2N+1)\frac{u}{2} \\ C=(2N+1)\frac{\pi}{2}\end{array}\right\} \longrightarrow dx = \left(\frac{2N+1}{2}\right)du$$

$$\begin{cases} x=0 \longrightarrow u=0 \\ x=C \longrightarrow u=\pi \end{cases}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int_0^\pi \frac{\sin(2N+1)\frac{u}{2}}{u}\,du = \lim_{N\to\infty}\int_0^\pi \underbrace{\frac{\sin(2N+1)\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}}}_{D_N(u)}\;\underbrace{\frac{\sin\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}}_{g(u)}\,du$$

$$= \frac{\pi}{2}\underbrace{g(0^+)}_{=1}$$ [براساس لم ۳ که در روند اثبات همگرایی سری فوریه به $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ گفته شد]

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

لم ۱: [لم ریمان - لبگ] Riemann - Lebesgue

اگر تابع $G(u)$ در فاصله‌ی $0<u<c$ پیوسته‌ی تکه‌ای باشد داریم: $\lim_{r\to\infty}\int_0^c G(u)\sin ru\,du = 0$

اثبات: فرض کنید تابع $G(u)$ در $a\leqslant u\leqslant b$ پیوسته‌ی تکه‌ای باشد در این صورت:

$\forall u,v\in[a,b]\;,\;|u-v|<\delta$

$\forall\,\varepsilon>0\;,\;\exists\,\delta$ به طوری که $|G(u)-G(v)|<\varepsilon$

فاصله‌ی a تا b را به N قسمت مساوی با طول $\frac{b-a}{N}$ تقسیم می‌کنیم.

اگر N به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، می‌توان گفت طول هر زیر بازه‌ی آن کمتر است.

$$a = u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_{N-1} < u_N = b$$

$$|u_n - u_{n-1}| < \delta \quad , \qquad n = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$\int_a^b G(u)\sin 2u\,du = \sum_{n=1}^{N}\int_{u_{n-1}}^{u_n} G(u)\sin 2u\,du$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\int_{u_{n-1}}^{u_n}\left[G(u) - G(u_n)\right]\sin 2u\,du + \sum_{n=1}^{N}\int_{u_{n-1}}^{u_n} G(u_n)\sin 2u\,du$$

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\int_{u_{n-1}}^{u_n} G(u)\sin 2u\,du\right| \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{N}\int_{u_{n-1}}^{u_n}\underbrace{|G(u) - G(u_n)|}_{\leq \varepsilon}\underbrace{|\sin 2u|}_{\leq 1}du}_{②}$$

② کل عبارت $\leq \frac{\varepsilon_0}{2}$ — چون G پیوسته است در هر نقطه، مقدار محدود دارد

$$+ \sum_{n=1}^{N}\underbrace{|G(u_n)|}_{\leq M}\underbrace{\int_{u_{n-1}}^{u_n}|\sin 2u|\,du}_{① \leq \frac{2}{2}} \leq \frac{2M}{2}\cdot N$$

$N \longrightarrow$ به خاطر $\Sigma$

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2(b-a)}$$

$$\int_{u_{n-1}}^{u_n}\sin 2u\,du = -\frac{1}{2}\cos 2u\Big]_{u_{n-1}}^{u_n}$$

$$① \int_{u_{n-1}}^{u_n}|\sin 2u|\,du = \left|\frac{1}{2}\cos 2u\right|\Big]_{u_{n-1}}^{u_n} \leq \frac{2}{2}$$

$$u_n - u_{n-1} = \frac{b-a}{N}$$

$$② \sum_{n=1}^{N}\frac{\varepsilon_0}{2(b-a)}\int_{u_{n-1}}^{u_n}du = \sum_{n=1}^{N}\frac{\varepsilon_0}{2(\cancel{b-a})}\cdot\frac{\cancel{b-a}}{N} = \sum_{n=1}^{N}\frac{\varepsilon_0}{2N} = \frac{\varepsilon_0}{2\cancel{N}}\cdot\cancel{N} = \frac{\varepsilon_0}{2}$$

$$\left|\int_a^b G(u)\sin 2u\,du\right| \leq \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{2M}{2}\cdot N$$

با انتخاب r بزرگ: $\frac{2MN}{r} \le \frac{\varepsilon_0}{2} \longleftarrow r \ge \frac{4MN}{\varepsilon_0}$

$$\left|\int_a^b G(u)\sin ru\,du\right| \le \frac{\varepsilon_0}{2}+\frac{\varepsilon_0}{2}=\varepsilon_0$$

یعنی با افزایش r این انتگرال به سمت صفر میل می‌کند.

«جلسه‌ی شانزدهم»

**لم ۲:** فرض کنید تابع $g(u)$ یک تابع پیوسته‌ی تکه‌ای در هر فاصله‌ی محدود روی محور مثبت u باشد و $g'_R(0)$ موجود باشد. اگر انتگرال $\int_0^\infty |g(u)|\,du$ همگرا باشد، آنگاه:

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^\infty g(u)\frac{\sin ru}{u}\,du=\frac{\pi}{2}g(0^+)$$

**اثبات:**

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^\infty g(u)\frac{\sin ru}{u}\,du=\lim_{r\to\infty}\Bigg[\int_0^\infty \overbrace{\frac{g(u)-g(0^+)}{u}}^{G(u)}\sin ru\,du \ (*)$$

$$+\int_0^\infty \frac{g(0^+)}{u}\sin ru\,du\Bigg] = \frac{\pi}{2}g(0^+)$$

$$g(0^+)\underbrace{\int_0^\infty \frac{\sin ru}{u}\,du}\overset{\text{مثال}}{=}\frac{\pi}{2}$$

براساس لم ۱، رابطه‌ی (*) به سمت صفر میل می‌کند.

$$G(0^+)=\lim_{u\to 0^+}\frac{g(u)-g(0^+)}{u}=g'_R(0)$$

$G(u)$ موجود و پیوسته است.

**قضیه:** اگر f یک تابع باشد که در هر فاصله‌ی محدود روی محور x پیوسته‌ی تکه‌ای باشد و به طور مطلق قابل انتگرال‌گیری روی آن محور باشد، یعنی $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$ همگرا است. پس انتگرال فوریه‌ی:

$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(s)\cos(\alpha(s-x))\,ds\,d\alpha$ به مقدار متوسط $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ در فاصله‌ی $-\infty<x<\infty$ همگرا می‌شود که مشتقات یک طرفه‌ی $f'_L(x)$ و $f'_R(x)$ وجود دارند.

اثبات:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^r\int_{-\infty}^\infty f(s)\cos(\alpha(s-x))\,ds\,d\alpha$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^r\int_x^\infty f(s)\cos(\alpha(s-x))\,ds\,d\alpha+\frac{1}{\pi}\int_0^r\int_{-\infty}^x f(s)\cos(\alpha(s-x))\,ds\,d\alpha$$

ابتدا همگرایی انتگرال‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\left|\int_x^\infty f(s)\cos(\alpha(\underbrace{s-x}_{u=s-x}))\,ds\right|\Rightarrow\left|\int_0^\infty f(u+x)\cos(\alpha u)\,du\right|\leqslant\int_0^\infty|f(u+x)|\,\underbrace{|\cos(\alpha u)|}_{\leq 1}\,du$$

داریم: $\sum|qp|\leqslant\sum|q||p|$

$$\leqslant\int_0^\infty|f(u+x)|\,du$$

$$\int_0^\infty|f(u+x)|\,du=\int_x^\infty|f(s)|\,ds\leqslant\int_{-\infty}^\infty|f(s)|\,ds$$

طبق صورت قضیه این انتگرال همگراست.

طبق آزمون M وایرشتراس انتگرال $\int_x^\infty f(s)\cos(\alpha(s-x))\,ds$ به طور یکنواخت همگراست.

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^r\int_x^\infty f(s)\cos(\alpha(s-x))\,ds\,d\alpha$$

$$\begin{cases}u=s-x\Rightarrow du=ds\\ s\to x\ ,\ u\to 0\\ s\to\infty\ ,\ u\to\infty\end{cases}$$

$$=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x+u)\left(\underbrace{\int_0^r\cos(\alpha u)\,d\alpha}_{\left.\frac{\sin\alpha u}{u}\right]_0^r\to\frac{\sin ru}{u}}\right)du$$

Year. Month. Day. Subject:

$$= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f(x+u)\,\frac{\sin ru}{u}\,du$$

بر اساس لم ۲

$$= \frac{1}{2} f(x^+) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\pi} f(x^+)\right)$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد:

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{r}\int_{-\infty}^{x} f(s)\cos(\alpha(s-x))\,ds\,d\alpha = \frac{1}{2} f(x^-)$$

نکته: رابطه‌ی $f(x) = \int_0^{\infty}\left[A(\alpha)\cos(\alpha x) + B(\alpha)\sin(\alpha x)\right]d\alpha$ که در آن $A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cos\alpha s\,ds$ و $B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\sin\alpha s\,ds$ معتبر است اگر تابع $f$ روی کل محور $x$ مطلقاً انتگرال‌پذیر بوده و هموار بخشی در هر فاصله بسته باشد.

نکته: اگر $f(x)$ زوج باشد، $B(\alpha)=0$، $A(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(s)\cos\alpha s\,ds$

اگر $f(x)$ فرد باشد، $A(\alpha)=0$، $B(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(s)\sin\alpha s\,ds$

نتیجه: اگر تابع $f$ روی محور مثبت $x$ تعریف شده باشد و شرایط (الف) و (ب) را ارضا کند، نمایش انتگرال فوریه‌ی کسینوسی برای هر $x$ معتبر است، همچنین انتگرال فوریه‌ی سینوسی نیز برای هر $x$ معتبر خواهد بود.

الف) تابع $f$ روی محور مثبت $x$ مطلقاً انتگرال‌پذیر است و تکه‌ای هموار روی هر فاصله‌ی بسته آن می‌باشد.

ب) در هر نقطه ناپیوستگی، $f$ مقدار متوسط $f(x^-)$ و $f(x^+)$ را دارد.

Farhang Gostar

Year. Month. Day. Subject:

**مثال:**

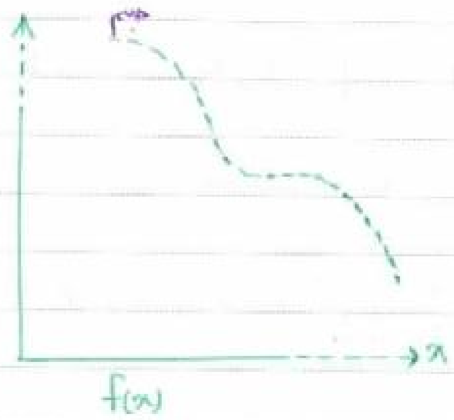
$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \qquad x,y > 0$

انتقال حرارت

«معادله‌ی رسانش در صفحه است»

$u(x,0) = f(x)$

$u(0,y) = 0$




* از انتگرال فوریه استفاده می‌کنیم چون حجم بی‌نهایت داریم و سری فوریه برای محدوده‌ی محدود کاربرد دارد.

$u(x,y) = X(x)\,Y(y)$

$X''Y + Y''X = 0 \longrightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda \qquad \lambda = \alpha^2$

مسئله اشتورم-لیوویل است و باید مقادیر ویژه مثبت باشد.

مسئله اشتورم-لیوویل
$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ Y'' - \lambda Y = 0 \end{cases}$

$u(0,y)$ ضریب $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ $\quad q = 0 \longrightarrow a_1 a_2 = 0 \longrightarrow$ باید $\lambda > 0$

$X(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$

$Y(y) = Ce^{\alpha y} + De^{-\alpha y}$

وقتی $y \to \infty$، $u$ باید محدود باشد پس $C = 0$

$u(0,y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \longrightarrow A = 0$

$X(x) = B\sin\alpha x$

$Y(y) = De^{-\alpha y}$

$$u(x,y) = BDe^{-\alpha y}\sin \alpha x \quad \text{و} \quad B(\alpha) = BD$$

$$\Longrightarrow u(x,y) = \int_0^\infty B(\alpha)\, e^{-\alpha y} \sin \alpha x \, d\alpha$$

$$u(x,0) = f(x) = \int_0^\infty B(\alpha) \sin \alpha x \, d\alpha$$

$$B(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x) \sin \alpha x \, dx$$

چرا:

$$|B(\alpha)| = \frac{2}{\pi}\left|\int_0^\infty f(x)\sin \alpha x\, dx\right| \leq \frac{2}{\pi}\int_0^\infty |f(x)||\sin \alpha x|\, dx$$

$$\leq \frac{2}{\pi}\int_0^\infty |f(x)|\, dx$$

اگر $f(x)$ به گونه‌ای باشد که $B(\alpha)$ برای $\alpha$ مثبت، محدود و پیوسته باشد، آنگاه u نیز کراندار است،

به شرطی که $B(\alpha)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد.

$$|u(x,y)| = \left|\int_0^\infty B(\alpha)\, e^{-\alpha y}\sin \alpha x\, d\alpha\right| \leq \int_0^\infty |B(\alpha)||\sin \alpha x|\, d\alpha$$

$$\leq \int_0^\infty |B(\alpha)|\, d\alpha$$

«در جلسه‌ی هفدهم»

مثال:

معادله‌ی انتقال حرارت رسانش یک بعدی گذرا

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx} & (x,t>0) \\ u(0,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$


$$u = X(x)T(t)$$

$$X\dot{T} = kX''T$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{\dot{T}}{kT} = -\lambda \quad , \quad \lambda = -\alpha^2$$

Year. Month. Day. Subject:

$$\begin{cases} X'' + \alpha^{2} X = 0 \longrightarrow X = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x \\ \dot{T} + \alpha^{2} k T = 0 \longrightarrow T = C e^{-\alpha^{2} k T} \end{cases}$$

$$u(0,t) = 0 \longrightarrow X(0) = 0 \longrightarrow A = 0$$

$$u(x,t) = \int_0^\infty \underbrace{BC}_{B(\alpha)} e^{-k\alpha^{2} t} \sin\alpha x \, d\alpha = \int_0^\infty B(\alpha) e^{-k\alpha^{2} t} \sin\alpha x \, d\alpha$$

$$u(x,0) = f(x) = \int_0^\infty B(\alpha) \sin\alpha x \, d\alpha$$

$$B(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\alpha x \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(s)\sin\alpha s \, ds$$

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(s) e^{-k\alpha^{2} t} \underbrace{\sin\alpha s \sin\alpha x}_{\frac{1}{2}[\cos(\alpha(s-x)) - \cos(\alpha(s+x))]} ds \, d\alpha$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-k\alpha^{2} t} \sin\alpha x \Big(\underbrace{\int_0^\infty f(s)\sin\alpha s \, ds}_{B(\alpha)}\Big) d\alpha$$

تابع زوج

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(s)\Big[\int_0^\infty \underbrace{e^{-k\alpha^{2} t}\cos\alpha(s-x)}_{1} d\alpha - \int_0^\infty \underbrace{e^{-k\alpha^{2} t}\cos\alpha(s+x)}_{2} d\alpha\Big] ds$$

1 $a = kt \quad , \quad b = (s-x)$

2 $a = kt \quad , \quad b = (s+x)$

1 $\rightarrow \int_0^\infty e^{-a\alpha^{2}} \cos(b\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^{2}}{4a}}$ «یادگاری»

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}}\int_0^\infty f(s)\Big[\underbrace{e^{-\frac{(s-x)^{2}}{4kt}}}_{1} - \underbrace{e^{-\frac{(s+x)^{2}}{4kt}}}_{2}\Big] ds$$

1 $\frac{(s-x)^{2}}{4kt} = \sigma^{2} \longrightarrow \sigma = \frac{s-x}{2\sqrt{kt}}$

Farhang Gostar

Year. Month. Day. Subject:

(2) $\dfrac{(s+x)^2}{4kt} = \alpha^2 \longrightarrow \alpha = \dfrac{s+x}{2\sqrt{kt}}$

(1) $\alpha\, d\alpha = \dfrac{(s-x)}{4kt}\, ds$

(2) $\alpha\, d\alpha = \dfrac{(s+x)}{4kt}\, ds \longrightarrow ds = 2\sqrt{kt}\, d\alpha$

$\dfrac{\cancel{s-x}}{\cancel{2}\sqrt{kt}}\, d\alpha = \dfrac{\cancel{s-x}}{\cancel{4}kt}\, ds \longrightarrow ds = 2\sqrt{kt}\, d\alpha$

$\dfrac{1}{2\sqrt{kt}}$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{\frac{-x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty} f(x+2\sqrt{kt}\,\alpha)\, e^{-\alpha^2}\, d\alpha - \int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty} f(2\alpha\sqrt{kt}-x)\, e^{-\alpha^2}\, d\alpha\right]$$

چک کردن درستی اشکال:

$$u(x,0) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \frac{f(x)}{\sqrt{\pi}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha}_{\sqrt{\pi}} = f(x)$$

پس جواب درسته!

## Error Function

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-r^2}\, dr$$

$erf(\infty) = 1$

$erf(0) = 0$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

$$\left.\begin{array}{l} r^2 = x^2 + y^2 \longrightarrow 2r = 2x\, dx + 2y\, dy \\ x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} dx\, dy = r\, dr\, d\theta$$

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr = -2\pi\left[\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{\infty} = \pi$$

$$\Longrightarrow I = \sqrt{\pi}$$

## Bessel Functions & Application — فصل هفتم: توابع بسل و کاربردها

$$\rho^2 \frac{d^2y}{d\rho^2} + \rho\frac{dy}{d\rho} + (\lambda\rho^2 - \nu^2)y = 0$$

عدد مثبت

$\lambda$: مقدار ویژه‌ی اشتروم_لیوویل
separation variable

درمسائل مقدار مرزی شامل $\nabla^2 u$ که در مختصات کروی یا استوانه‌ای بیان شده است این
لاپلاسین $u$
معادله و توابع بسل کاربرد دارند.

$$x = \sqrt{\lambda}\,\rho \Rightarrow \frac{dy}{d\rho} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{d\rho} = \sqrt{\lambda}\,\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{d\rho^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{d\rho}\right)\cdot\frac{dx}{d\rho} = \sqrt{\lambda}\,\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\lambda}\,\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{d^2y}{d\rho^2} = \lambda\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\underbrace{\lambda\rho^2}_{x^2}\frac{d^2y}{dx^2} + \underbrace{\rho\sqrt{\lambda}}_{x}\frac{dy}{dx} + (\underbrace{\lambda\rho^2}_{x^2} - \nu^2)y = 0$$

Bessel's Equation:

$$\boxed{x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y = 0} \qquad \frac{dy}{dx} = y' \ ,\quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

جواب این معادله را Bessel's Function یا Cylindrical Function می‌گویند.

برای حل این معادله از روش سری های توانی استفاده می کنیم. $\nu$ را یک عدد طبیعی در نظر می گیریم:

$\nu = n$

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+c}$$

$$y' = \sum_{j=0}^{\infty} (j+c) a_j x^{j+c-1}$$

$$y'' = \sum_{j=0}^{\infty} (j+c-1)(j+c) a_j x^{j+c-2}$$

روابط بالا را در معادله ی بسل جایگذاری می کنیم:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j (j+c-1)(j+c) x^{j+c} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j (j+c) x^{j+c} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+c+2} - n^2 \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+c} = 0$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \left[((j+c)-1)(j+c) + (j+c) - n^2\right] x^{j+c} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+c+2} = 0$$

طرفین رابطه را به $x^c$ تقسیم می کنیم:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \left[(j+c)^2 - n^2\right] x^j + \sum_{j=2}^{\infty} a_{j-2} x^j = 0$$

$c = \pm n$ $\quad$ $a_1 = 0$

$$\underbrace{a_0 \left[c^2 - n^2\right]}_{=0} + \underbrace{a_1}_{=0} \left[(1+c)^2 - n^2\right] x$$

$$+ \sum_{j=2}^{\infty} \left\{ a_{j-2} + a_j \left[(j+c)^2 - n^2\right] \right\} x^j = 0$$

$$a_j = \frac{-a_{j-2}}{(j+c)^2 - n^2} \longrightarrow c = n \longrightarrow a_j = \frac{-a_{j-2}}{j(2n+j)}$$

$j^2 + n^2 + 2jn - n^2 \longrightarrow$

if $c = -n \to j^2 - 2jn \xrightarrow{j=2n} 4n^2 - 4n^2 = 0 \to a_j \to \infty$

$$a_1 = 0 \;,\; a_2 = \frac{-a_0}{(2+c)^2 - n^2}$$

$a_3 = \frac{-a_1}{\dots} = 0$ , $a_5 = 0$ ضرایب فرد صفر هستند.

$$a_4 = \frac{-a_2}{(4+c)-n^2} = \left(\frac{a_0}{(4+c)^2-n^2}\right) \cdot \frac{1}{(2+c)^2-n^2}$$

$c=n$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{k!\,(n+1)(n+2)\dots(n+k)2^{2k}}a_0$$

$$y = a_0 x^n + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}\, x^{n+2k}$$

$$1\times 2\times 3\times \dots \times n\times(n+1)\dots(n+k) = (n+k)!$$

$$(n+1)\dots(n+k) = \frac{(n+k)!}{n!}$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k n!}{k!(n+k)!2^{2k}} a_0$$

$$y = a_0\left[x^n + x^n n! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\right.$$

$$a_0 = \frac{1}{n!\,2^n}$$

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

تابع بسل نوع اول از مرتبه‌ی n: $J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$

« جلسه‌ی هجدهم »

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

تابع بسل نوع اول از مرتبه‌ی n

جواب $c=-n$ قابل قبول نیست چون به ازای $j=2n$ ضریب $a_j$ بی‌نهایت می‌شود

## خاصیت های تابع بسل نوع اول

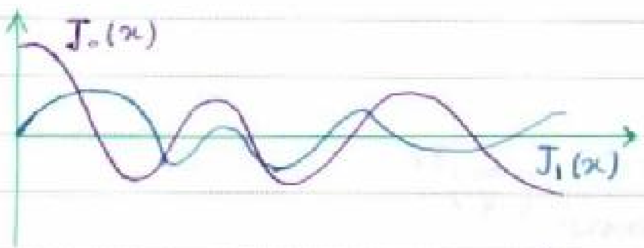
۱) $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$

تابع $J_n$ به ازای nهای زوج، زوج و به ازای nهای فرد، فرد است.

۲) $J_0(0) = 1$

۳) $J_1(0) = 0$

۴) $J_1(x) = -J_0'(x)$




توابع بسل نوع اول، غیر از مرتبه‌ی ۰ ( $J_0(x)$ ) حتی از مبدأ شروع می شوند، فقط $J_0(x)$ از $y=1$ شروع می شود.

اگر در معادله‌ی بسل $n=0$، جواب معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$y_n = AJ_0(x) + B\left[J_0(x)\ln(x) + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2\times 4^2}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{x^6}{2^2\times 4^2\times 6^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\cdots\right]$$

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 0/5772 = \text{ثابت اویلر} = \gamma$$

A و B ثوابت دلخواه هستند، پس:

$$\begin{cases} A = \frac{2}{\pi}(\gamma - \ln 2) \\ B = \frac{2}{\pi} \end{cases}$$

$$y_n = \frac{2}{\pi}(\gamma - \ln 2) J_0(x) + \frac{2}{\pi}\left[J_0(x)\ln(x) + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 4^2}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \dots\right]$$

$$y_n = \frac{2}{\pi}\left[(\gamma - \ln 2 + \ln(x)) J_0(x) + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 4^2}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \dots\right]$$

$$y = \frac{2}{\pi}\left[(\ln x + \gamma) J_0(x) + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 4^2}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \dots\right] = Y_0(x)$$

این رابطه برای $x > 0$ نوشته می شود.

$Y_0(x)$ تابع (وبر) بسل نوع دوم از مرتبه ی صفر اگر در $Y_0(x)$ بجای $J_0(x)$ از $J_n(x)$ استفاده کنیم، حاصل $Y_n(x)$ یا تابع بسل نوع دوم از مرتبه ی n خواهد شد.

اگر $\nu$ عدد طبیعی باشد ( $\nu = n$ ) جواب عمومی معادله ی بسل به صورت زیر خواهد بود:

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x)$$

$J_n(x)$: نوع اول از مرتبه ی n — $Y_n(x)$: نوع دوم از مرتبه ی n

$Y_n$ و $J_n$ دو تابع مستقل هستند. ($C_1$ و $C_2$ ثوابت دلخواه)

**بررسی معادله ی بسل در حالتی که $\nu$ عدد طبیعی نباشد:**

معادله ی بسل: $x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$

از تعریف تابع گاما استفاده می کنیم:

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu - 1} \, dt \qquad \nu > 0$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} \, dt = -\left[e^{-t}\right]_0^\infty = 1$$

Year Month Day Subject

$$\Gamma(\nu+1) = \nu\,\Gamma(\nu)$$

اثبات :

$$\Gamma(\nu+1) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\nu}\, dt$$

$$\begin{cases} u = t^{\nu} \\ dv = e^{-t}\,dt \end{cases} \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\Gamma(\nu+1) = \left(-e^{-t}\, t^{\nu}\right)\Big|_0^{\infty} + \int_0^\infty \nu\, e^{-t}\, t^{\nu-1}\, dt = \nu \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\nu-1}\, dt$$

$$= \nu\,\Gamma(\nu)$$

- برای $\nu=0$ ، $\Gamma(0)=\infty$

- برای $\nu<0$ ، $\frac{1}{\Gamma(\nu)}$ پیوسته است

( $\Gamma(\nu)$ برای $\nu = 0, -1, -2, \ldots$ ، به بی نهایت میل می کند.)

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{-1/2}\, dt$$

$$t = x^2$$

$$dt = 2x\,dx$$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\, \frac{1}{x}\, x\,dx$$

$$= 2\underbrace{\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx}_{erf}$$

$$= 2\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

erf = error function

اگر $\nu$ عدد طبیعی : ( $\nu = n$ )

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=n!\,\Gamma(1)=n!$$

با معرفی تابع گاما می‌توان جواب کلی معادلهٔ بسل را نوشت:

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$$

$$\longrightarrow J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$$

تابع بسل نوع اول از مرتبهٔ $\nu$ (برای $\nu>0$)

اگر $\nu=n$ ، $\Gamma(n+k+1)=(n+k)!$ و جواب بسل همان حالت قبلی خواهد شد.

اگر $\nu>0$

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}$$

تا زمانی که $(-\nu+k+1)>0$ ، $\Gamma$ بی‌نهایت می‌شود و برخی از جملات تابع بسل صفر می‌شوند.

اگر $k+1>\nu$ ، آنگاه $\Gamma$ بی‌نهایت نخواهد شد.

می‌توان نشان داد $J_\nu$ و $J_{-\nu}$ به طور خطی مستقل هستند. پس جواب عمومی معادلهٔ بسل

درحالت کلی به صورت زیر خواهد بود:

$$y=c_1J_\nu(x)+c_2J_{-\nu}(x)$$

$\nu>0$ ، $\nu\neq 1,2,\dots$ اعداد طبیعی

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$$

اگر $\nu=1,2,\dots$ ، $J_\nu$ و $J_{-\nu}$ مستقل نیستند.

Year Month Day Subject:

$$\star \leftrightarrow J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \longleftarrow \nu = n$$

روابط پسرو و پیشرو:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-n} J_n(x)\right) = -x^{-n} J_{n+1}(x) \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{n} J_n(x)\right) = x^{n} J_{n-1}(x) \quad (2)$$

$$(1) \longrightarrow x^{-n} J_n'(x) - n x^{-n-1} J_n(x) = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر } x^{-n}} J_n'(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x)$$ رابطه ی پیشرو (۳)

$$(2) \longrightarrow x^n J_n'(x) + (n) x^{n-1} J_n(x) = x^n J_{n-1}(x)$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر } x^{n}} J_n'(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x)$$ رابطه ی پسرو (۴)

$$(3) = (4) \longrightarrow$$

$$\frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x)$$

$$2n J_n(x) = x\left(J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)\right)$$

$$x J_{n+1}(x) = 2n J_n(x) - x J_{n-1}(x)$$ رابطه ی بازگشتی

اگر از رابطه ی (۲) انتگرال بگیریم:

$$x^n J_n(x) = \int_0^x s^n J_{n-1}(s)\, ds$$

Year Month Day — Subject:

$$n=1 \rightsquigarrow x J_1(x) = \int_0^x s J_0(s)\, ds$$

« جلسه‌ی نوزدهم »

این روابط برای $\nu$ های حقیقی هم برقرار است.

مولد تابع بسل:

یادآوری:

$$e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{\frac{x}{2}t} \cdot e^{-\frac{x}{2t}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{xt}{2}\right)^j}{j!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-x}{2t}\right)^k}{k!}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{j+k}\, t^{j-k}\, (-1)^k}{j!\, k!\, 2^{j+k}}$$

برای $j-k$ دو حالت ممکن است پیش بیاید:

$$j-k = \begin{cases} n & n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ -n & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

برای هر حالت یک سری می‌نویسیم:

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{n+2k}\, t^n\, (-1)^k}{(k+n)!\, k!\, 2^{n+2k}}}_{\text{if } j-k=n \rightarrow j=k+n} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j+n}\, t^{-n}\, (-1)^{j+n}}{j!\, (n+j)!\, 2^{2j+n}}}_{\text{if } j-k=-n \rightarrow k=j+n}$$

$J_n(x)$ $\qquad\qquad$ $J_n(x)$

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(x)\, t^n + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\, t^{-n} (-1)^n$$

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) \left(t^n + \left(\frac{-1}{t}\right)^n\right) + J_0(x)$$

$$t = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

Year. Month. Day. Subject:

$$\frac{1}{t} = e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

$$t - \frac{1}{t} = \cos\varphi + i\sin\varphi - (\cos\varphi - i\sin\varphi) = 2i\sin\varphi$$

$$e^{ix\sin\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\left[e^{in\varphi} + (-1)^n e^{-in\varphi}\right] + J_0(x)$$

$\cos(x\sin\varphi) + i\sin(x\sin\varphi)$ $\quad$ $\cos n\varphi + i\sin n\varphi$ $\quad$ $\cos n\varphi - i\sin n\varphi$

$$= J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (1+(-1)^n) J_n(x)\cos n\varphi + i\sum_{n=1}^{\infty} (1-(-1)^n) J_n(x)\sin n\varphi$$

قسمت های حقیقی را با هم برابر قرار می دهیم و قسمت های موهومی را با هم

$$\begin{cases} \cos(x\sin\varphi) = \underbrace{J_0(x)}_{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(1+(-1)^n) J_n(x)}_{a_n}\cos n\varphi & \text{سری کسینوسی:} \\ \sin(x\sin\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(1-(-1)^n) J_n(x)}_{b_n}\sin n\varphi & \text{سری سینوسی:} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi = (1+(-1)^n) J_n(x) \qquad (1)$$

« برای $n$ های زوج »

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x\sin\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi = (1-(-1)^n) J_n(x) \qquad (2)$$

« برای $n$ های فرد »

با جمع کردن روابط (1), (2) :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi$$

شکل انتگرالی تابع بسل نوع اول از مرتبه ی $n$

بررسی کرانی تابع بسل :

$$|J_n(x)| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi\right| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{|\cos(n\varphi - x\sin\varphi)|}_{\leq 1}\, d\varphi$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\varphi = 1$$

Year. Month. Day. — Subject:

$J_n(x)$ کراندار است $\rightsquigarrow \Rightarrow |J_n(x)| \leqslant 1$

$$\left|\frac{d^k}{dx^k} J_n(x)\right| \leqslant 1 \qquad k = 1, 2, \dots$$

به عنوان نمونه $J_0(x)$ را بررسی می‌کنیم:

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin\varphi)\,d\varphi$$

$$\longrightarrow \frac{\pi}{2} J_0(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x\sin\varphi)\,d\varphi \longrightarrow \left|\frac{\pi}{2} J_0(x)\right| \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$\longrightarrow |J_0(x)| \leqslant 1$$

نکته: مطابق روابط ① و ② وقتی $(a_n , b_n)$ $n \to \infty$، ضرایب سری فوریه یعنی $a_n$ و $b_n$ ناچیز شده و صفر می‌شوند یعنی $\lim_{n\to\infty} J_n(x) = 0$

هدف بررسی $\lim_{x\to\infty} J_0(x)$

$$\frac{\pi}{2} J_0(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x\sin\varphi)\,d\varphi$$

$\sin\varphi = u$

$$du = \cos\varphi\,d\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi}\;d\varphi$$

$$\longrightarrow d\varphi = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

بجا بذار: $\frac{\pi}{2} J_0(x) = \int_0^1 \frac{\cos(xu)}{\sqrt{1-u^2}}\,du \underset{\text{جداسازی}}{=} \int_0^c \frac{\cos(xu)}{\sqrt{1-u^2}}\,du + \int_c^1 \frac{\cos xu}{\sqrt{1-u^2}}\,du$

$$\left|\int_0^c \frac{\cos(xu)}{\sqrt{1-u^2}}\,du\right| \leqslant \int_0^c \frac{|\cos(xu)|}{\sqrt{1-u^2}}\,du \xrightarrow{} \text{مثبت}$$

$$\leqslant \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \sin^{-1}(c) - \cancel{\sin^{-1}(0)}^{\,0}$$

$$\left|\int_c^1 \frac{\cos xu}{\sqrt{1-u^2}}\,du\right| \leqslant \int_c^1 \left|\frac{\cos xu}{\sqrt{1-u^2}}\right| du$$

$$\leqslant \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(c) = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(c) \quad (*)$$

$$\frac{\pi}{2}\left|J_0(x)\right| \leqslant \left|\int_0^c \frac{\cos(xu)}{\sqrt{1-u^2}}\,du\right| + \left|\int_c^1 \frac{\cos xu}{\sqrt{1-u^2}}\,du\right|$$

$$\leqslant \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du + \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

$$= \sin^{-1} c + \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(c) = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \left|J_0(x)\right| \leqslant 1$$

رابطهٔ $(*)$ نشان می‌دهد $\int_c^1 \frac{\cos xu}{\sqrt{1-u^2}}\,du$ به طور یکنواخت نسبت به $x$ همگرا است.

و با انتخاب $c$ مناسب به طوری که $c-1$ به قدر کافی کوچک شود، $\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(c)$ به صفر میل خواهد کرد.

طبق لم ریمان-لبگ:

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^c G(u) \begin{Bmatrix} \sin ru \\ \cos ru \end{Bmatrix} du = 0$$

پس $$\lim_{x\to\infty} \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}}_{G(u)} \cos xu\,du = 0$$

این خاصیت برای $J_n(x)$ برقرار هست.

$\circledast \; x^2(x^c u'' + 2c x^{c-1} u' + c(c-1)x^{c-2} u) + x(x^c u' + c x^{c-1} u) + (x^2 - \nu^2) x^c u = 0$

$\Rightarrow x^c (x^2 u'' + 2cx u' + c(c-1)u + xu' + cu + (x^2 - \nu^2) u) = 0$

$x^2 u'' + (2c+1) x u' + (c^2 + x^2 - \nu^2) u = 0$

تابع بسل:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

$$y(x) = x^c u(x) \qquad (y(x) = J_\nu(x))$$

$$y' = x^c u' + c x^{c-1} u$$

$y'' = c x^{c-1} u' + x^c u'' + c(c-1) x^{c-2} u + c x^{c-1} u'$

$y'' = x^c u'' + 2c x^{c-1} u' + c(c-1) x^{c-2} u$

$$y'' = x^c u'' + 2c x^{c-1} u' + c(c-1) x^{c-2} u$$

جایگذاری تابع بسل: $\circledast$

$$\cancel{x^c}\left[c(c-1)x + 2cxu' + x^2 u''\right] + \cancel{x^c}\left[xu' + cu\right] + (x^2 - \nu^2)\cancel{x^c} u = 0$$

$$x^2 u'' + (1 + 2c) x u' + (x^2 + c^2 - \nu^2) u = 0$$

اگر $c = -\frac{1}{2}$ (حالت خاص) $\rightsquigarrow$ $x^2 u'' + (x^2 + \frac{1}{4} - \nu^2) u = 0$

$$u = \frac{J_\nu(x)}{x^c} = \sqrt{x}\, J_\nu(x)$$

اگر $\nu = 0$ $\longleftarrow$ $x^2 u'' + (x^2 + \frac{1}{4}) u = 0$

$$u = \sqrt{x}\, J_0(x)$$

« جلسه‌ی بیستم »

می خواهیم بررسی کنیم که آیا معادله‌ی بسل از نوع مسائل اشترم-لیوویل هست یا نه؟

سپس سری فوریه تعمیم یافته برحسب توابع بسل را به دست بیاوریم.

$$x^2 \frac{d^2X}{dx^2} + x\frac{dX}{dx} + (\lambda x^2 - n^2) X = 0 \quad \xRightarrow{\div x} \qquad 0 \leqslant x \leqslant c$$

$x \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{dX}{dx} + \left(\lambda x - \frac{n^2}{x}\right) X = 0$

$$\frac{d}{dx}\left(x \frac{dX}{dx}\right) + \left(-\frac{n^2}{x} + \lambda x\right) X = 0$$

Farhang Gostar

Year ...... Month ...... Day ......　　　　Subject: ......

مقایسه با معادله‌ی اشترم-لیوویل : $\frac{d}{dx}\left(r\frac{dX}{dx}\right) + (q + \lambda P)X = 0$

$x \sim r$

$-\frac{n^2}{x} \sim q$

$x \sim P$

شرایط مرزی مسأله نیز باید به این صورت باشد:

$b_1 X(c) + b_2 X'(c) = 0$

که $b_1$ و $b_2$ به طور همزمان صفر نیستند و $X$ و $X'$ در فاصله‌ی $0 < x < c$ پیوسته هستند.

برای معادلات اشترم-لیوویل اثبات کردیم که $\lambda$ باید حقیقی باشد. پس می‌توان سه حالت برای $\lambda$ متصور بود:

حالت الف) $\lambda = 0$

$$x^2\frac{d^2X}{dx^2} + x\frac{dX}{dx} - n^2X = 0$$ معادله‌ی کوشی-اویلر

تغییر متغیر

$$x = e^s \Rightarrow \frac{d^2X}{ds^2} - n^2X = 0$$

$$X(s) = Ae^{ns} + Be^{-ns} = Ax^n + Bx^{-n}$$

برای محدود بودن جواب $B = 0 \Leftarrow$ $X(x) = Ax^n$

می‌توان چند نوع شرط مرزی را در نظر گرفت:

نوع اول : $X(c) = 0 \longrightarrow X(c) = Ac^n = 0 \longrightarrow A = 0 \longrightarrow X(x) = 0$

جواب بدیهی

Year: Month: Day: Subject:

نوع دوم: $nX(c) + cX'(c) = 0$

$$\left( b_1 X(c) + b_2 X'(c) = 0 \xrightarrow{\times \frac{c}{b_2}} \overbrace{\frac{b_1 c}{b_2}}^{h} X(c) + cX'(c) = 0 \right)$$

نوع دوم (حالت ۲و۳): $hX(c) + cX'(c) = 0 \xrightarrow{\text{if } n \neq 0} Ahc^n + cnAc^{n-1} = 0 \longrightarrow (h+n)Ac^n = 0$

$\rightarrow A = 0 \rightarrow X(x) = 0$

اگر $n = 0 \Rightarrow \frac{d^2X}{ds^2} = 0 \longrightarrow X = AS + B = A\ln x + B$ به عنوان یک حالت خاص:

برای محدود بودن جواب در $x = 0$، باید $A = 0$

if $n = 0$

$X = B$

if $h = 0 \longrightarrow X(c) = 0 \longrightarrow X(x) = B$

if B.C. in the form of $X(c) = 0 \longrightarrow B = 0 \longrightarrow X(x) = 0$

if B.C. in the form of $hX(c) + cX'(c) = 0 \Rightarrow hB = 0 \rightarrow B = 0$

$\rightarrow X(x) = 0$

پس اگر $\lambda = 0$، تنها در یک حالت جواب غیر بدیهی برای مسأله به دست می‌آید:

$X(x) = 1 \longleftarrow n = h = 0$

حالت ب) $\lambda = \alpha^2 > 0$ و $\alpha > 0$

$$x^2 \frac{d^2X}{dx^2} + x\frac{dX}{dx} + (\alpha^2 x^2 - n^2)X = 0 \qquad 0 \leq x \leq c$$

جواب عمومی: $X(x) = C_1 J_n(\alpha_n x) + C_2 Y_n(\alpha_n x)$

چون $Y_n$ در $x = 0$ نامحدود است، برای محدود بودن جواب $C_2 = 0$ پس $X(x) = C_1 J_n(\alpha_n x)$

حالت اول شرط مرزی: $X(c)=0 \Rightarrow J_n(\alpha_j c)=0$

$J_n$ بی نهایت بار محور $x$ ها را قطع می‌کند.

حالت دوم شرط مرزی: $hX(c)+cX'(c)=0 \Rightarrow hJ_n(\alpha_j c)+cJ'_n(\alpha_j c)=0$

$$xJ'_n(x)=nJ_n(x)-xJ_{n+1}(x) \longrightarrow (h+n)J_n(\alpha_j c)-\alpha_j c J_{n+1}(\alpha_j c)=0$$

$$J'_n(x)=\frac{n}{x}J_n(x)-J_{n+1}(x)$$

یک حالت خاص: if $h=n=0 \longrightarrow X(x)=c_1 J_0(\alpha_j x)$ , $j=1,2,\dots$

تابع ویژه

حالت سوم شرط مرزی: $X'(c)=0$

$$\Rightarrow c_1\alpha_j J'_0(\alpha_j c)=0 \xrightarrow{J_1(x)=-J'_0(x)} J_1(\alpha_j c)=0$$

$\alpha_1=0 \Rightarrow J_1(0)=0$ به درد ما نمی‌خورد

$$X(x)=c_1J_0(\alpha_1 x)=c_1\underbrace{J_0(0)}_{=1}=c_1$$

$$\lambda_1=\alpha_1^2=0 \Longrightarrow X_1(x)=1$$

در حالت (ب) نیز $\lambda_1=0$ به همراه $X_1(x)=1$ می‌رسد برای $\lambda_j=\alpha_j^2>0$ تابع ویژه ی

$$X_j(x)=J_n(\alpha_j x)$$

حالت ج) $\lambda=-\alpha^2<0$ و $\alpha>0$

$$x^2\frac{d^2X}{dx^2}+x\frac{dX}{dx}-(\alpha^2x^2+n^2)X=0 \qquad 0\leqslant x\leqslant c$$

$$s=\alpha x \longrightarrow \frac{dX}{dx}=\frac{dX}{ds}\cdot\frac{ds}{dx}=\alpha\frac{dX}{ds}$$

$$\frac{d^2X}{dx^2}=\alpha^2\frac{dX}{ds}$$

$$\alpha^2 x^2 \frac{d^2X}{ds^2} + \alpha x \frac{dX}{ds} - (\alpha^2 x^2 + n^2) X = 0$$

$$s^2 \frac{d^2X}{ds^2} + s\frac{dX}{ds} - (s^2 + n^2) X = 0$$

جواب معادله به صورت $X(s) = I_n(s)$ $\longleftarrow$ $X(x) = I_n(\alpha x)$ خواهد بود.

$J_n \longrightarrow I_n$ تابع بسل نوع اول اصلاح شده است. $\qquad I_n(x) = i^{-n} J_n(ix)$

$Y_n \longrightarrow K_n$ تابع بسل نوع دوم اصلاح شده است. $\qquad i = \sqrt{-1}$

$\forall x > 0 \quad , I_n(\alpha x) > 0$

همچنین $I_n$ به ازای همه‌ی $x$ها (حتی $x=0$) محدود است.

حالت اول شرط مرزی: $X(c) = 0$

پس این شرط مرزی ارضا نمی‌شود. $\qquad I_n(\alpha_j c) = 0$ $\times$

حالت دوم شرط مرزی: $hX(c) + cX'(c) = 0$

$$h I_n(\alpha c) + c I_n'(\alpha c) = 0$$

می‌توان اثبات کرد که:

$$x I_n'(x) = n I_n(x) + x I_{n+1}(x)$$

پس:

$$h I_n(\alpha c) + \alpha c \left( \frac{h}{\alpha c} I_n(\alpha c) + I_{n+1}(\alpha c) \right) = 0$$

شرط مرزی ارضا نمی‌شود. $\qquad (h+n) I_n(\alpha c) + \alpha c I_{n+1}(\alpha c) = 0$

Year. Month. Day. Subject:

قضیه: اگر $n = 0, 1, 2, \dots$ برای مسأله ( S_L Singular ) اشترم - لیوویل نامتعین با معادله دیفرانسیل:

$$x^2 \frac{d^2X}{dx^2} + x\frac{dX}{dx} + (\lambda x^2 - n^2) X = 0$$

و یکی از شرایط مرزی:

$$\begin{cases} X(c) = 0 & ① \\ hX(c) + cX'(c) = 0 & ② \\ X'(c) = 0 \quad (h=0) & ③ \end{cases}$$

باشد، در این صورت مقادیر ویژه و توابع ویژه عبارتند از:

$$\lambda_j = \alpha_j^2 \quad , \quad X_j(x) = J_n(\alpha_j x)$$

که در آن $\alpha_j$ به صورت زیر خواهد بود:

① $\alpha_j$ ریشه‌های مثبت $J_n(\alpha_j c) = 0$ $\quad (j = 1, 2, \dots)$

② $\alpha_j$ ریشه‌های مثبت $(h+n) J_n(\alpha_j c) - \alpha_j c J_{n+1}(\alpha_j c) = 0$ $\quad (j = 1, 2, \dots)$

③ $\alpha_1 = 0$ ، $X_1 = J_0(\alpha_1 c) = 1$

« جلسه‌ی بیست و یکم »

خاصیت تعامد تابع بسل:

$$f(x) = \sum c_n \phi_n$$

داشتیم: $\int_0^c p(x) X_n(x) X_m(x)\, dx = 0$

$X_m$ و $X_n$ توابع ویژه‌ی مسأله اشترم - لیوویل

برای معادلهٔ بسل: $P(x) = x$ ; $J_n(\alpha_j x)$ $J_n(\alpha_k x)$ توابع ویژه

توابع بسل نسبت به $x$ متعامدند $X_m$ و $X_n$

$$\int_0^c x\, J_n(\alpha_j x)\, J_n(\alpha_k x)\, dx = 0 \qquad k \neq j$$

$$j = k \Rightarrow \int_0^c x \left[J_n(\alpha_j x)\right]^2 dx = \| J_n(\alpha_j x) \|^2$$

فرض کنید تابع $f$ دارای سری فوریه‌ی تعمیم یافته‌ی $\sum_{j=1}^{\infty} C_j Q_j(x)$ در فاصله‌ی $0 < x < c$ است،

در این صورت:

$$C_j = (f, \phi_j) = \int_0^c x f(x)\, \phi_j(x)\, dx$$

$$\phi_j(x) = \frac{J_n(\alpha_j x)}{\| J_n(\alpha_j x) \|}$$ تابع یا متعامد

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \frac{J_n(\alpha_j x)}{\| J_n(\alpha_j x) \|}$$

$$C_j = \int_0^c x f(x) \frac{J_n(\alpha_j x)}{\| J_n(\alpha_j x) \|} dx$$ تابع یا متعامد

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j J_n(\alpha_j x) \\ A_j = \dfrac{\int_0^c x f(x) J_n(\alpha_j x)\, dx}{\| J_n(\alpha_j x) \|^2} \end{cases}$$

محاسبه‌ی $\| J_n(\alpha_j x) \|^2$

معادله‌ی بسل: $(xX')' + \left(\alpha^2 x - \frac{n^2}{x}\right) X = 0$

$\underbrace{X(x) = J_n(\alpha_j x)}_{\text{جواب مسأله}}$ رابطه را در $2xX'$ ضرب می کنیم

$$2xX'(xX')' + 2xX'X\left(\alpha^2 x - \frac{n^2}{x}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[(xX')^2\right] + (\alpha^2x^2 - n^2)\frac{d}{dx}(X^2) = 0 \xrightarrow{\text{انتگرال}}$$

$$\int_0^c \frac{d\left[(xX')^2\right]}{dx}\,dx + \int_0^c \overbrace{(\alpha^2x^2 - n^2)}^{u}\overbrace{\frac{d}{dx}(X^2)\,dx}^{dv} = 0$$

$$(xX')^2\Big|_0^c + (\alpha^2x^2 - n^2)X^2\Big|_0^c - \int_0^c 2\alpha^2 x X^2\,dx = 0 \xrightarrow{\div 2\alpha^2}$$

$$\int_0^c xX^2\,dx = \frac{1}{2\alpha^2}\left[(xX')^2 + (\alpha^2x^2 - n^2)X^2\right]_0^c$$

می دانیم جواب معادلهٔ بسل $X = J_n(\alpha x)$

$$\int_0^c x\left[J_n(\alpha x)\right]^2 dx = \frac{1}{2\alpha^2}\left[\alpha^2c^2\left(J_n'(\alpha c)\right)^2 + (\alpha^2c^2 - n^2)\left(J_n(\alpha c)\right)^2\right]$$

$$\|J_n(\alpha x)\|^2 = \frac{1}{2\alpha^2}\left[\left(cJ_n'(\alpha c)\right)^2 + (\alpha^2c^2 - n^2)\left(J_n(\alpha c)\right)^2\right]$$

داریم: $[J_n(\alpha x)]' = \alpha J_n'(\alpha x)$

می خواهیم $\|J_n(\alpha x)\|^2$ را برای سه شرط مرزی گفته شده در قضیه، به دست آوریم.

شرط مرزی I: $X(c) = 0 \Longrightarrow J_n(\alpha_j c) = 0 \quad ; \; j = 1, 2, \dots$

$$\Rightarrow \|J_n(\alpha_j c)\|^2 = \frac{1}{2\alpha_j^2}\left[\alpha_j c J_n'(\alpha_j c)\right]^2$$

از قبل داشتیم: $xJ_n'(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$

$$\Longrightarrow \alpha_j c J_n'(\alpha_j c) = n\cancel{J_n(\alpha c)} - \alpha_j c J_{n+1}(\alpha_j c)$$

$$\Longrightarrow J_n'(\alpha_j c) = -J_{n+1}(\alpha_j c) \Longrightarrow \|J_n(\alpha_j c)\|^2 = \frac{1}{2\alpha_j^2}\left[\alpha_j c\left(-J_{n+1}(\alpha_j c)\right)\right]^2$$

$$\Longrightarrow \|J_n(\alpha_j c)\|^2 = \frac{c^2}{2}\left[J_{n+1}(\alpha_j c)\right]^2$$

Year. Month. Day. Subject:

$$\|J_n(\alpha_j c)\|^2 = \frac{c^2}{2}\left[J_{n+1}(\alpha_j c)\right]^2$$ فرمول نرم برای شرط مرزی I

شرط مرزی II :

$$hX(c) + cX'(c) = 0$$

$$hJ_n(\alpha_j c) + \alpha_j c J_n'(\alpha_j c) = 0 \Rightarrow J_n'(\alpha_j c) = \frac{-hJ_n(\alpha_j c)}{\alpha_j c}$$

$$\|J_n(x)\|^2 = \frac{1}{2\alpha_j^2}\left[\alpha_j^2 c^2\left[-\frac{hJ_n(\alpha_j c)}{\alpha_j c}\right]^2 + (\alpha_j^2 c^2 - n^2)(J_n(\alpha_j c))^2\right]$$

$$\|J_n\|^2 = \frac{1}{2\alpha_j^2}(\alpha_j^2 c^2 - n^2 + h^2)\left[J_n(\alpha_j c)\right]^2$$ فرمول نرم برای شرط مرزی II

شرط مرزی III :

$$X'(c) = 0 \Rightarrow J_n'(\alpha_j c) = 0$$

$$\Rightarrow \|J_n\|^2 = \frac{(\alpha_j^2 c^2 - n^2)}{2\alpha_j^2}\left[J_n(\alpha_j c)\right]^2$$ فرمول نرم برای شرط مرزی III

**قضیه:** اگر تابع $f(x)$ تکه‌ای هموار در فاصله‌ی $0<x<c$ باشد و فرض کنیم $f(x)$ در هر نقطه‌ی ناپیوستگی‌اش دارای حدود یک طرفی $f(x^+)$ و $f(\bar{x})$ باشد آنگاه:

سری فوریه-بسل: $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j J_n(\alpha_j x)$

$$A_j = \frac{1}{\|J_n(\alpha_j x)\|^2}\int_0^c x f(x) J_n(\alpha_j x)\,dx$$

که در آن روابط $A_j$ از قسمت قبل بدست می‌آید.

**نکته:** می‌توان به جای $n$ عدد حقیقی $(\nu > -\frac{1}{2})$ قرار داد. (عدد حقیقی بزرگتر از $-\frac{1}{2}$)

Farhang Gostar

مثال: تابع $f(x) = x$ را در فاصله‌ی $0<x<1$ با استفاده از سری فوریه-بسل بسط دهید.

فرض کنید شرط مرزی نوع III برقرار است. ($c=1$ و $n=0$)
(بسل مرتبه صفر)

$$A_j = \frac{1}{\|J_0(\alpha_j x)\|^2} \int_0^c x^2 J_0(\alpha_j x)\, dx$$

$$A_1 = \frac{1}{\|J_0(\alpha_1 x)\|^2} \int_0^c x^2 J_0(\alpha_1 x)\, dx$$

برای شرط مرزی III : $\alpha_1 = 0$

$$A_1 = \frac{1}{\|J_0(0)\|^2} \int_0^1 x^2 \underbrace{J_0(0)}_{1} dx = \frac{1}{3\|J_0(0)\|^2}$$

$$\|J_0(0)\|^2 = \int_0^1 x \underbrace{J_0^2(0)}_{1} dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \Longrightarrow A_1 = \frac{2}{3}$$

$$A_j = \frac{1}{\|J_0(\alpha_j x)\|^2} \int_0^1 \underbrace{x^2 J_0(\alpha_j x)\, dx}_{(\alpha_j x = s \Rightarrow ds = \alpha_j dx)} =$$

$x^2 = \frac{s^2}{\alpha_j^2}$ ; $\alpha_j x = s$ ; $dx = \frac{ds}{\alpha_j}$

$$\overset{\text{با توجه به}}{\underset{\text{روابط قبل}}{=}} \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{2}[J_0(\alpha_j)]^2}} \underbrace{\int_0^{\alpha_j} \frac{s^2}{\alpha_j^3} J_0(s)\, ds}_{I}$$

III شرط مرزی نوع $\Rightarrow \|J_n\|^2 = \frac{(\alpha_j^2 c^2 - n^2)}{2\alpha_j^2}[J_n(\alpha_j c)]^2 \Rightarrow \frac{\alpha_j^2 c^2 - n^2}{2\alpha_j^2} = \frac{1}{2}$ از قبل داشتیم:

$$I = \frac{1}{\alpha_j^3} \int_0^{\alpha_j} s^2 J_0(s)\, ds$$

$$\frac{d}{ds}\left(s J_1(s)\right) = s J_0(s)$$

$$I = \frac{1}{\alpha_j^3} \int_0^{\alpha_j} \underbrace{s}_{u} \underbrace{(s J_0(s))\, ds}_{dv}$$

Year. Month. Day. Subject:

$$= \frac{1}{\alpha_j^3}\left[ s^2 J_1(s) \Big|_0^{\alpha_j} - \int_0^{\alpha_j} s J_1(s)\, ds \right]$$

$$= \frac{1}{\alpha_j^3}\left[ \alpha_j^2 J_1(\alpha_j) - \int_0^{\alpha_j} s J_1(s)\, ds \right]$$

$$\frac{d}{dx}\left[ x^n J_n(x) \right] = x^n J_{n-1}(x)$$

$$A_j = \frac{2}{\alpha_j^3 \left[ J_0(\alpha_j) \right]^2} \left[ \left( \alpha_j^2 J_1(\alpha_j) \right) - \int_0^{\alpha_j} s J_1(s)\, ds \right]$$

$$j = 2, 3, \ldots$$

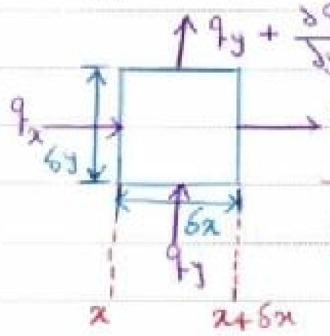
$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j J_0(\alpha_j x) = \overbrace{A_1 J_0(\alpha_1 x)}^{1} + \sum_{j=2}^{\infty} A_j J_0(\alpha_j x)$$

$$= \frac{2}{3} + \sum_{j=2}^{\infty} A_j J_0(\alpha_j x)$$

«جلسه‌ی بیست و دوم»  $C_p$ برای سیالات و $C$ برای جامدات

مثال: هدف: به دست آوردن توزیع دما در استوانه تا محور (خیلی بلند)

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$




بسط تیلور: $q_x(x+\delta x)=q_x+\frac{\partial q_x}{\partial x}\cdot\delta x$

قانون بقای انرژی:

نرخ تغییرات انرژی سیستم = مجموع انرژی خروجی − مجموع انرژی ورودی

شار در واحد سطح

$$(\cancel{q_x})\cdot\delta y+(\cancel{q_y})\cdot\delta x-\left[\left(\cancel{q_x}+\frac{\partial q_x}{\partial x}\cdot\delta x\right)\delta y+\left(\cancel{q_y}+\frac{\partial q_y}{\partial y}\cdot\delta y\right)\delta x\right]$$

$$=\delta m\cdot C_p\cdot\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x}\cdot\cancel{\delta x\delta y}-\frac{\partial q_y}{\partial y}\cdot\cancel{\delta x\delta y}=\rho\cancel{\delta x\delta y}\cdot C_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

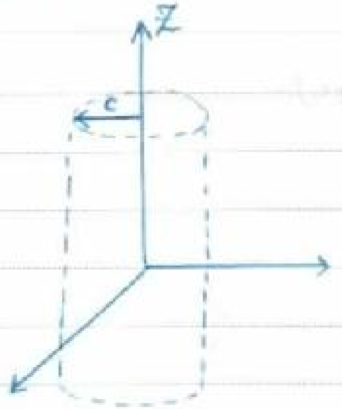
قانون فوریه:

$$\left.\begin{aligned}q_x&=-k\frac{\partial T}{\partial x}\\ q_y&=-k\frac{\partial T}{\partial y}\end{aligned}\right\}\Rightarrow k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right]=\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)=\frac{\rho C_p}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{k}{\rho C_p}=\alpha\longrightarrow\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

**مختصات استوانه‌ای:** وقتی نسبت طول به شعاع خیلی زیاد باشد می‌توان استوانه را نامتناهی فرض کرد $(\rho, \phi, Z)$




$$\begin{cases} u_t = k\left(u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho\right) \\ u(c,t) = 0 \quad (t>0) \\ u(\rho,0) = f(\rho) \quad (0<\rho<c) \end{cases}$$

C: شعاع استوانه

به خاطر تقارن محوری $\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$

**حل:** با استفاده از روش جداسازی متغیرها:

- استوانه دما ثابت است.
- در جهت $Z$ انتقال حرارت صرف‌نظر شده.

$$u(\rho,t) = T(t) \cdot R(\rho)$$

$$\dot{T} \cdot R = k\left(T \cdot R'' + \frac{1}{\rho} R' T\right) = kT\left(R'' + \frac{1}{\rho} R'\right)$$

$$\frac{\dot{T}}{kT} = \left(\frac{R'' + \frac{1}{\rho} R'}{R}\right) = -\alpha^2 \quad \text{مقدار ویژه}$$

$-\lambda^2$ ?

$$\begin{cases} \dot{T} + \alpha^2 k T = 0 \xrightarrow{①} T(t) = Ae^{-\alpha^2 k t} \\ R'' + \frac{1}{\rho} R' + \alpha^2 R = 0 \end{cases}$$

② $\rho^2 R'' + \rho R' + \alpha^2 \rho^2 R = 0 \xleftarrow{\times \rho^2}$ [معادله‌ی بسل برای $n^2=0$]

معادله‌ی بسل: $\left[\rho^2 y'' + \rho y' + (\lambda \rho^2 - \nu^2) y = 0\right.$

جواب این معادله تابع بسل نوع اول از مرتبه‌ی صفر می‌باشد:

$$\rightarrow R(\rho) = J_0(\alpha \rho)$$

$$u(\rho,t)=\sum_{j=1}^{\infty} A_j J_0(\alpha_j\rho)e^{-\alpha_j^2 kt}$$

که $\alpha_j$ ریشه‌های : (**حالت اول** شرط مرزی که قبلاً گفته شده) $J_0(\alpha_j c)=0$ هستند.

$$\boxed{u(\rho,t)=\sum_{j=1}^{\infty} A_j J_0(\alpha_j\rho)e^{-\alpha_j^2 kt}}$$

برای بدست آوردن $A_j$ از شرط اولیه استفاده می‌کنیم:

$$u(\rho,0)=f(\rho)=\sum_{j=1}^{\infty} A_j J_0(\alpha_j\rho)$$

$A_j$ ضریب سری بسل - فوریه است که به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$A_j=\frac{1}{\|J_0(\alpha_j\rho)\|^2}\int_0^c \rho f(\rho)J_0(\alpha\rho)d\rho$$

$$\|J_0(\alpha_j\rho)\|^2 \;\text{فرمول}\; =\frac{c^2}{2}\left[J_1(\alpha_j c)\right]^2$$

برای شرایط مرزی نوع اول

$$\boxed{A_j=\frac{1}{\frac{c^2}{2}\left[J_1(\alpha_j c)\right]^2}\int_0^c \rho f(\rho)J_0(\alpha_j\rho)d\rho}$$

**مثال:** استوانه‌ی بلند با منبع حرارتی

$$\begin{cases} u_t=k\left(u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho\right)+q_0 \\ u(c,t)=0 \quad (t>0) \\ u(\rho,0)=0 \quad (0<\rho<c) \end{cases}$$

$q_0$ : شار حرارتی ثابت بر واحد حجم

$(\rho,\phi,z)$

می‌توان $J_0(\alpha_j\rho)$ را به عنوان یک پایه برای $u$ فرض کرد و بسط بسل - فوریه $u$ را به عنوان جواب مسأله در نظر گرفت:

Year. Month. Day. Subject.

$$u(\rho,t)=\sum_{j=1}^{\infty} A_j(t)\, J_0(\alpha_j \rho)$$

u را در معادلهی اصلی ها بگذاری می کنیم: (اولین کار: باید بسط بسل-فوریه را حل کنیم)

$$\dot{A} J_0(\alpha\rho) = kA\left(\underbrace{J_0''(\alpha\rho)+\frac{1}{\rho}J_0'(\alpha\rho)}_{-\alpha^2 J_0(\alpha\rho)\ \text{با توجه به ①}}\right) + q_0 \times 1$$

معادله بسل: $\rho^2 R'' + \rho R' + \alpha^2 \rho^2 R = 0$

جواب معادلهی فوق $J_0$ است.

$$\rho^2 J_0'' + \rho J_0' + \alpha^2 \rho^2 J_0 = 0$$

$$J_0'' + \frac{1}{\rho} J_0' + \alpha^2 J_0 = 0 \quad ①$$

بسط بسل - فوریه: $f(\rho)=1$

$$1=\sum_{j=1}^{\infty} B_j\, J_0(\alpha_j \rho)$$

که $\alpha_j$ ریشه های: $J_0(\alpha_j c)=0 \quad , \quad j=1,2,\dots$

$$B_j = \frac{1}{\|J_0(\alpha_j\rho)\|^2}\int_0^c \rho \times \overset{f(\rho)}{1} \times J_0(\alpha_j\rho)\, d\rho$$

$$= \frac{1}{\frac{c^2}{2}\left[J_1(\alpha_j c)\right]^2}\int_0^c \rho J_0(\alpha_j \rho)\, d\rho$$

قبلاً داشتیم: $\int s J_0(s)\, ds = s J_1(s)$

اگر $\alpha_j \rho = s \longrightarrow d\rho = \dfrac{ds}{\alpha_j}$

$$\longrightarrow \int_0^c \rho J_0(\alpha_j\rho)\, d\rho = \frac{1}{\alpha_j^2}\int_0^{\alpha_j c} s J_0(s)\, ds$$

Year Month Day Subject

$$= \frac{1}{\alpha_j^2}\left[sJ_1(s)\right]_0^{\alpha_j c} = \frac{c}{\alpha_j} J_1(\alpha_j c)$$

$$\Rightarrow B_j = \frac{2}{\alpha_j c J_1(\alpha_j c)} \Leftarrow B_j = \frac{1}{\frac{c^2}{2}[J_1(\alpha_j c)]^2} \times \frac{c}{\alpha_j} J_1(\alpha_j c) = \frac{2}{\alpha_j c J_1(\alpha_j c)}$$ ادامه حل مثال:

$$1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha_j c J_1(\alpha_j c)} \cdot J_0(\alpha_j \rho)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\dot{A}_j + k\alpha_j^2 A_j) J_0(\alpha_j \rho) = \frac{2q_0}{c} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j J_1(\alpha_j c)} J_0(\alpha_j \rho)$$

$$\dot{A}_j + k\alpha_j^2 A_j = \frac{2q_0}{c\alpha_j J_1(\alpha_j c)}$$

$$A_j = e^{-\int k\alpha_j^2 dt}\left[\int \frac{2q_0}{c\alpha_j J_1(\alpha_j c)} e^{\int k\alpha_j^2 dt} dt + D\right]$$

$$= e^{-k\alpha_j^2 t}\left[\frac{2q_0}{c\alpha_j J_1(\alpha_j c)} \int e^{k\alpha_j^2 t} dt + D\right]$$

$$= \frac{2q_0}{kc\alpha_j^3 J_1(\alpha_j c)} + D e^{-k\alpha_j^2 t}$$

برای بدست آوردن D بوسیله‌ی شرط اولیه: $u(\rho, 0) = 0 \longrightarrow A_j(0) = 0$

$$\Rightarrow D + \frac{2q_0}{kc\alpha_j^3 J_1(\alpha_j c)} = 0 \quad \Rightarrow D = -\frac{2q_0}{kc\alpha_j^3 J_1(\alpha_j c)}$$

$$\Rightarrow A_j(t) = \frac{2q_0}{kc\alpha_j^3 J_1(\alpha_j c)}\left(1 - e^{-k\alpha_j^2 t}\right)$$

هرچه زمان جلوتر می رود مسأله steady تر (پایدارتر) می شود.

**مثال :**

$$\begin{cases} u_t = k\left(u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho\right) & (0<\rho<c \ , \ t>0) \\ k u_\rho(c,t) = H\left(0 - u(c,t)\right) \\ \hookrightarrow c\,u_\rho(c,t) = \frac{-cH}{k}\,u(c,t) \longrightarrow c\,u_\rho(c,t) = -h\,u(c,t) \\ u(\rho,0) = f(\rho) & 0<\rho<c \end{cases}$$

معادله‌ی انتقال حرارت ← شرط مرزی جابجایی / همرفتی

حل با استفاده از روش جداسازی متغیرها :

$$u(\rho,t) = R(\rho)\,T(t)$$

طبق جلسات قبل : $u(\rho,t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j e^{-k\alpha_j^2 t} J_0(\alpha_j \rho)$

یادآوری: شرط مرزی نوع سوم: $c X'(c) + h X(c) = 0$

$$c u_\rho(c,t) + h u(c,t) = 0$$

پس، شرط مرزی از نوع شرط مرزی نوع سوم می‌باشد ← برای $\|J_0\|$ و $\alpha_j$ها (ریشه‌های مثبت معادله)

در نتیجه $\alpha_j$ها ریشه‌های معادله‌ی زیر می‌باشد. $(n=0)$

$$c\alpha_j J_0'(\alpha_j c) + h J_0(\alpha_j c) = 0 \quad , \quad j = 1,2,3,\dots$$

شرط اولیه $\longrightarrow u(\rho,0) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j J_0(\alpha_j \rho) = f(\rho)$

$$\longrightarrow A_j = \frac{1}{\|J_0(\alpha_j \rho)\|^2}\int_0^c \rho f(\rho) J_0(\alpha_j \rho)\,d\rho$$

$$\|J_0(\alpha_j \rho)\|^2 = \frac{\alpha_j^2 c^2 + h^2}{2\alpha_j^2}\left[J_0(\alpha_j c)\right]^2$$

$$\longrightarrow A_j = \frac{2\alpha_j^2}{(\alpha_j^2 c^2 + h^2)\left(J_0(\alpha_j c)\right)^2}\int_0^c \rho f(\rho) J_0(\alpha_j \rho)\,d\rho$$

اگر سطح مرزی استوانه عایق باشد $u_\rho(c,t) = 0$ (مشتق نسبت به $\rho$) یا $(H = 0)$ می‌شود. (در ادامه‌ی محاسبات تمام $h$ها را صفر قرار می‌دهیم)

جواب مسئله مشابه جواب قبلی خواهد بود فقط به جای H صفر قرار می‌دهیم (در واقع شرط مرزی نوع سوم داریم).

## فصل هشتم: چند جمله‌ای‌ها لژاندر

چند جمله‌ای‌های لژاندر پایه برای فضای توابعی که در جواب معادله‌ی لاپلاس، در مختصات کروی صدق می‌کنند، هستند.

معادله‌ی لژاندر:

$$\left[(1-x^2)y'\right]' + \lambda y = 0$$

$$\longrightarrow (1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

طرفین تقسیم بر $(1-x^2)$ $\longrightarrow y'' - \frac{2x}{(1-x^2)}y' + \frac{\lambda}{(1-x^2)}y = 0$

$x = \pm 1$ نقاط تکین

$x = 0$ نقطه‌ی معمولی

حل با استفاده از روش سری توانی:

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad ; \quad y' = \sum_{j=0}^{\infty} j a_j x^{j-1} \quad ; \quad y'' = \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2}$$

$$\longrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2} - \sum_{j=0}^{\infty} \left[j(j-1) + 2j - \lambda\right] a_j x^j = 0$$

$$\longrightarrow j(j-1) + 2j = j(j+1)$$

$$\underbrace{\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2}}_{} - \sum_{j=0}^{\infty} \left(j(j+1) - \lambda\right) a_j x^j = 0$$

با $j \longrightarrow j+2$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left\{ (j+2)(j+1) a_{j+2} - \left[j(j+1) - \lambda\right] a_j \right\} x^j = 0$$

Year. Month. Day. Subject:

لازم نیست

$$a_{j+2} = \frac{-\lambda + j(j+1)}{(j+2)(j+1)} a_j \qquad (j \geq 2)$$

اگر $a_1 = 0$ ← همه‌ی ضرایب فرد مساوی صفر می‌شوند.

سری اول:

$$y_1 = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x^{2k}$$

اگر $a_0 = 0$ ← همه‌ی ضرایب زوج مساوی با صفر می‌شوند.

سری دوم:

$$y_2 = a_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$$

point ← تمام ضرایب با اندیس فرد بر حسب $a_1$ و تمام ضرایب با اندیس زوج بر حسب $a_0$ به دست می‌آیند ($a_0$ و $a_1$ ثوابت اختیاری هستند)

برای بررسی همگرایی سری از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم:

برای سری اول:

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{2(k+1)} x^{2(k+1)}}{a_{2k} x^{2k}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{2k(2k+1)-\lambda}{(2k+1)(2k+2)} x^2 \right|$$

$$a_{2k+2} = \frac{2k(2k+1)-\lambda}{(2k+1)(2k+2)} a_{2k}$$

$$= |x^2| \overset{\text{باید}}{<} 1 \quad \text{تا همگرا شود}$$

$$|x| < 1$$

$$-1 < x < 1$$

ضرایب چند جمله‌ای لژاندر

« جلسه‌ی بیست و سوم »

$$-1 < x < 1$$

$$a_{2k+2} = \frac{2k(2k+1)-\lambda}{(2k+1)(2k+2)} a_{2k}$$

$\lambda$ را به صورت: $\lambda = n(n+1)$ در نظر می‌گیریم $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$a_{j+2} = \frac{j(j+1)-n(n+1)}{(j+1)(j+2)} a_j$$

$j=n \longrightarrow a_{n+2}=0 \longrightarrow a_{n+4}=0$ و $a_{n+6}=0$

$(a_{n+2k}=0 \quad , \quad k=1,2,\dots)$

$y_1 = a_0 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ ($n$ زوج)    اگر $a_1=0$

$y_2 = a_1 x + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$ ($n$ فرد)    اگر $a_0=0$

اگر $n=0 \longrightarrow a_2=a_4=\dots=0 \longrightarrow y_1=a_0$

اگر $n=1 \longrightarrow a_3=a_5=\dots=0 \longrightarrow y_2=a_1 x$

اگر $n$ زوج باشد سری دوم ($y_2$) بی نهایت جمله دارد و اگر $n$ فرد باشد سری اول بی نهایت جمله دارد.

اگر $n$ زوج باشد مرسوم است که مقدار $a_0$ طوری تعیین شود که وقتی ضرایب $a_2$ و ... $a_n$ به دست می‌آید، ضریب نهایی: $a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$ باشد.

این کار برای این صورت می‌گیرد که چندجمله‌ای $y_1 = a_0 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ در $x=1$، برابر با 1 شود.

اگر $n$ فرد باشد، $a_1$ را طوری انتخاب می‌کنیم که ضریب نهایی در $y_2$ به صورت: $a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$ باشد

تا در $x=1$ ، $y_2=1$

با در نظر گرفتن: $a_n = \dfrac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$

Year. Month. Day. Subject:

چند جمله ای لژاندر نوع اول:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!\,(n-2k)!}\,x^{n-2k}$$

به ازای $x=1$، $P_n(1)=1$

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_2(x) = \dfrac{3x^2-1}{2} \\ \vdots \end{cases}$$

جواب کلی معادله ی لژاندر:

$$y = C_1 P_n(x) + C_2 \underset{\downarrow}{Q_n(x)}$$

چند جمله ای لژاندر نوع دوم

$P_n(x)$ و $Q_n(x)$ به طور خطی مستقل هستند و $Q_n(x)$ در بازه ی $-1<x<1$ تکین است.

معادله ی لژاندر یک معادله ی اشتروم - لیوویل تکین (نامنظم) است.

$$(1-x^2)X'' - 2xX' + n(n+1)X = 0$$

$$\left[(1-x^2)X'(x)\right]' + \lambda X(x) = 0$$

معادله ی اشتروم-لیوویل: $(rX')' + (q+\lambda p)X(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} r(x) = 1-x^2 \\ q(x) = 0 \\ p(x) = 1 \end{cases}$

تابع وزنی

مقادیر ویژه ی این معادله $\lambda = n(n+1)$ و توابع ویژه ی نظیر آن $P_n(x)$ (چند جمله ای لژاندر) است.

$$\int_{-1}^{1} \underset{\text{تابع وزنی}}{1}\, P_n(x)\, P_m(x)\, dx = 0 \qquad (m \neq n)$$

برای $\sin nx$ و $\cos nx$، تابع وزنی $P(x)=1$ و برای توابع بسل، تابع وزنی $P(x)=x$ بود.

باید ثابت کنیم که $\lambda_n$ تنها مقادیر ویژه‌ی معادله می‌باشد. اگر تابع $f$ تکه‌ای هموار در فاصله‌ی $-1<x<1$ باشد، سری فوریه‌ی تعمیم یافته‌ی عمومی نسبت به مجموعه توابع یکا متعامد $\phi_n = \dfrac{P_n(x)}{\|P_n(x)\|}$ که $\|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2 dx$ به $f(x)$ همگرا می‌شود، به جز تعداد محدودی از نقاط واقع در فاصله‌ی $-1<x<1$.

بنابراین مجموعه‌ی توابع $\{\phi_n(x)\}$ در فضای $C_p(-1,1)$ بسته است. (یعنی هیچ تابعی با نرم مثبت وجود ندارد که نسبت به $\phi_n$ متعامد باشد.)

فرض کنید $\lambda'$، مقدار ویژه‌ی متفاوت از $\lambda_n$ باشد و $X$ تابع ویژه‌ی نظیر آن باشد و

$(\phi_n, X) = 0$ و $n = 0, 1, 2, \ldots$

ضرب داخلی

از طرفی مجموعه‌ی $\{\phi_n\}$ یک مجموعه‌ی متعامد است، پس هیچ تابعی با نرم مثبت وجود ندارد که بر آن عمود باشد. پس باید $X=0$ و چون تابع ویژه نمی‌تواند به طور همواره صفر باشد، لذا $X$ نباید یک تابع ویژه باشد و تنها مقادیر ویژه $\lambda_n$ ها خواهند بود.

**نتیجه فرعی:** مقادیر ویژه و توابع ویژه‌ی نظیر مسأله‌ی اشتورم-لیوویل تکین با معادله‌ی $[(1-x^2)X'(x)]' + \lambda X(x) = 0$ در فاصله‌ی $0<x<1$ و شرط مرزی $X'(0)=0$ عبارتند از:

$\lambda_n = 2n(2n+1)$ و $X_n = P_{2n}(x)$

همچنین اگر شرط مرزی به صورت $X(0)=0$ باشد، مقادیر ویژه و توابع ویژه‌ی آن عبارتند

از: $\lambda_n = 2n(2n+1)$ و $X_n = P_{2n+1}(x)$

## Rodrigues' formula فرمول رودریگز

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$$

$$P_0(x) = \frac{1}{\underbrace{2^0}_{1}\cdot\underbrace{0!}_{1}}\underbrace{(x^2-1)^0}_{1} = 1$$

$$P_1(x) = \frac{1}{2^1\, 1!}\frac{d}{dx}(x^2-1) = x$$

می‌خواهیم نشان دهیم: $P_n(1) = 1$

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k} D^k(f)\, D^{n-k}(g)$$

$$\frac{d^n}{dx^n} = \binom{n}{0} D^n(g)\times f + \binom{n}{1} D(f)\, D^{n-1}(g) + \binom{n}{n} D^n(f)\times g$$

$$u = x^2-1 \longrightarrow \frac{d^n}{dx^n}(u^n) = \frac{d^n}{dx^n}\Big(\underbrace{(x-1)^n}_{g}\underbrace{(x+1)^n}_{f}\Big)$$

$$= (x+1)^n \underbrace{D^n\left[(x-1)^n\right]}_{n!} + nD\left[(x+1)^n\right] D^{n-1}\left[(x-1)^n\right] + \dots$$

$$\left.\frac{d^n}{dx^n}\right|_{x=1} = (1+1)^n\times n! + n\times 0 + \dots + 0 = 2^n n!$$

$$\Longrightarrow P_n(1) = \frac{2^n n!}{2^n n!} = 1$$

به طور مشابه اثبات می‌شود:

$$P_n(-1) = (-1)^n P_n(1) = (-1)^n$$

و

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

نکته: $P_n$ با شماره‌ی زوج تابع زوج و $P_n$ با شماره‌ی فرد تابع فرد است.

روابط های بازگشتی برای محاسبه‌ی $P_n$:

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (1+2n)P_n(x)$$

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$$

|| جلسه‌ی بیست و چهارم ||

محاسبه‌ی نرم $P_n(x)$

$$\|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^{1}\left[P_n(x)\right]^2 dx = (P_n, P_n)$$

رابطه‌ی بازگشتی (دوم) را به $P_{n-1}$ ضرب (داخلی) می‌کنیم:

$$(n+1)\underbrace{(P_{n-1}, P_{n+1})}_{=0} + n\underbrace{(P_{n-1}, P_{n-1})}_{\|P_{n-1}\|^2} = (2n+1)\underbrace{(xP_n, P_{n-1})}_{A}$$

$n-1 \neq n+1$

$$\Rightarrow (n-1+1)(P_{n-2}, P_{n-1+1}) + (n-1)(P_{n-2}, P_{n-2}) = \overbrace{(2(n-1)+1)}^{2n-2+1}(xP_{n-1}, P_{n-2}) \Rightarrow$$

در رابطه‌ی بازگشتی دوم n را به n-1 تبدیل می‌کنیم: $n(P_{n-2}, P_n) + (n-1)(P_{n-2}, P_{n-2}) = (2n-1)(xP_{n-1}, P_{n-2})$

$$nP_n(x) + (n-1)P_{n-2}(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x)$$

رابطه‌ی فوق را به $P_n(x)$ ضرب داخلی می‌کنیم:

$$n\underbrace{(P_n, P_n)}_{\|P_n\|^2} + (n-1)\underbrace{(P_n, P_{n-2})}_{0} = (2n-1)\underbrace{(xP_{n-1}, P_n)}_{B}$$

به راحتی می‌توان دید که $A = B$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{n}}{2n+1}\|P_{n-1}\|^2 = \frac{\cancel{n}}{2n-1}\|P_n\|^2$$

(۵۳)

$$\|P_n\|^2 = \frac{2n-1}{2n+1}\|P_{n-1}\|^2 \qquad n=1 \Rightarrow \|P_1\|^2 = \frac{1}{3}\|P_0\|^2$$

$$n=1 \longrightarrow \|P_0\|^2 = 3\|P_1\|^2 \qquad ① \quad \|P_0\|^2 = 5\|P_2\|^2$$

$$n=2 \longrightarrow 3\|P_1\|^2 = 5\|P_2\|^2 \qquad n=2 \Rightarrow \|P_2\|^2 = \frac{3}{5}\|P_1\|^2$$

$$(2n-1)\|P_{n-1}\|^2 = (2n+1)\|P_n\|^2 \longrightarrow \|P_0\|^2 = (2n+1)\|P_n\|^2$$

$$\|P_0\|^2 = \int_{-1}^{1}[P_0]^2 dx = \int_{-1}^{1} 1\, dx = 2$$

$$\Rightarrow \|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

$$\varphi_n(x) = \frac{P_n(x)}{\|P_n(x)\|} = \frac{P_n(x)}{\sqrt{\frac{2}{2n+1}}} = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, P_n(x)$$

سری فوریه‌ی تعمیم یافته:

$$f = \sum C_n \varphi_n(x)$$

$$C_n = (f, \varphi_n) = \int_{-1}^{1} f\varphi_n dx = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\int_{-1}^{1} f P_n(x)\, dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{2n+1}{2}\right)\left(\int_{-1}^{1} f P_n(x)dx\right)}_{A_n} P_n(x)$$

سری فوریه ـ لژاندر تابع f

$$f = \sum A_n P_n(x)$$

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f P_n dx$$

قضیه: اگر f یک تابع تکه‌ای هموار در فاصله‌ی $-1<x<1$ باشد و فرض کنیم که $f(x)$ در هر نقطه‌ی ناپیوستگی f در فاصله‌ی مورد نظر به صورت مقدار متوسط $f(x^-)$ و $f(x^+)$ تعریف شود، در این صورت داریم:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n(x) \quad \text{و} \quad A_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx$$

یعنی تا اینجا بحث روی رسانش بود

**نکته:** قبلاً گفته شد $P_n$ ها با شماره‌ی زوج زوج است و $P_n$ با شماره‌ی فرد فرد است پس:

اگر $f$ زوج باشد (ضرایب فرد $=0$) $\Leftarrow$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} P_{2n}(x) \;,\; A_{2n} = (4n+1)\int_0^1 f(x) P_{2n}(x)\, dx$$

اگر $f$ فرد باشد (ضرایب زوج $=0$) $\Leftarrow$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} P_{2n+1}(x) \;,\; A_{2n+1} = (4n+3)\int_0^1 f(x) P_{2n+1}(x)\, dx$$

$$Q_0(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

($Q_n(x)$ تابع لژاندر نوع دوم)

**مثال:** تابع $f(x)=1$ را توسط سری لژاندر بسط دهید.

چون $f=1$ زوج است ⇐ ضرایب فرد $=0$

$$f = \sum A_{2n} P_{2n}(x)$$

$$A_{2n} = (4n+1)\int_0^1 P_{2n}(x)\, dx$$

طبق رابطه‌ی بازگشتی ۱: $P_{2n}(x) = \dfrac{P'_{2n+1}(x) - P'_{2n-1}(x)}{4n+1}$

$$\longrightarrow A_{2n} = \Big[P_{2n+1}(x) - P_{2n-1}(x)\Big]_0^1$$

$$A_{2n} = P_{2n+1}(1) - P_{2n+1}(0) - P_{2n-1}(1) + P_{2n-1}(0)$$ قبلاً داشتیم $P_n(1)=1$

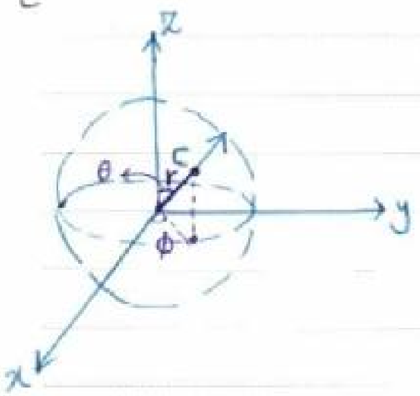
$$A_{2n} = -\Big[P_{2n+1}(0) - P_{2n-1}(0)\Big]$$

* تا اینجا جواب مسأله بدست آمده اما می‌توان این مرحله را جلوتر برد:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} P_{2n}(x) = A_0 P_0(x) + A_2 P_2 + \dots$$

Year. Month. Day. Subject:

مثال: کره‌ای به شعاع $c$ را در نظر بگیرید که دمای آن در معادلهٔ $\nabla^2 u = 0$ صدق می‌کند. توزیع دمای آن را بدست آورید.




$0 < \theta < \pi$

$0 < r < c$

مسأله پایاست، $\left(\frac{\partial u}{\partial t} = 0\right.$ که تغییرات نسبت به زمان نیست

شرط مرزی: $u(c,\theta) = \underbrace{f(\theta)}_{\text{تابع معلوم}}$

به دلیل تقارن: $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ (نسبت به $\phi$ متقارن است)

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

جداسازی متغیرها: $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$

$$\longrightarrow r\frac{d^2}{dr^2}(rR)\Theta + \frac{R}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{r}{R}\frac{d^2}{dr^2}(rR) = \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) = -\lambda$$

$$\begin{cases} -r\frac{d^2}{dr^2}(rR) = -\lambda R \quad ① \\ \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) = -\lambda\sin\theta\,\Theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}(rR) = R + rR' \\ \frac{d}{dr}(R + rR') = R' + R' + rR'' \end{cases}$$

① دوبار از $rR$ مشتق می‌گیریم $\longrightarrow r(R' + rR'' + R') = \lambda R$

$\longrightarrow r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0$ معادلهٔ کوشی-اویلر

Year.... Month.... Day....   Subject:

$$R(r) = r^{\beta}$$

$$R'(r) = \beta r^{\beta-1}$$

$$R''(r) = \beta(\beta-1) r^{\beta-2}$$

$$\begin{cases} r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0 \Rightarrow \\ r^2\left(\beta(\beta-1) r^{\beta-2}\right) + 2r\left(\beta r^{\beta-1}\right) - \lambda r^{\beta} = 0 \\ \beta(\beta-1) r^{\beta} + 2\beta r^{\beta} - \lambda r^{\beta} = 0 \Rightarrow \\ r^{\beta}\left(\beta(\beta-1) + 2\beta - \lambda\right) = 0 \end{cases}$$

$$(\beta(\beta-1) + 2\beta - \lambda) r^{\beta} = 0 \longrightarrow \beta^2 + \beta - \lambda = 0$$

$$\lambda = n(n+1) \longrightarrow \beta^2 + \beta - n(n+1) = 0$$

$$\begin{cases} \beta = n \\ \beta = -(n+1) \end{cases} \longrightarrow R(r) = C_1 r^{n} + C_2 r^{-n-1}$$

چون در $r=0$ جوابها محدود باشد، پس $C_2 = 0$

برای معادله ② $x = \cos\theta \longleftarrow \theta = \cos^{-1} x$

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{d}{dx} \cdot \frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta \frac{d}{dx}$$

$$\longrightarrow -\cancel{\sin\theta} \frac{d}{dx}\left(-\sin^2\theta \frac{d\Theta}{dx}\right) = -\lambda \cancel{\sin\theta}\, \Theta$$

$$-\frac{d}{dx}\left((1-x^2) \frac{d\Theta}{dx}\right) = \lambda\Theta$$

$$\longrightarrow \left[(1-x^2)\Theta'\right]' + \lambda\Theta = 0$$ معادله لژاندر

$$\lambda = n(n+1) \longrightarrow \Theta(x) = P_n(x) = P_n(\cos\theta)$$

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_m r^n P_n(\cos\theta)$$

$$u(c,\theta) = f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{C_m c^n}_{A_n} P_n(\cos\theta)$$

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(\theta) P_n(x)\,dx = C_m c^n \longrightarrow C_m = \frac{A_n}{c^n}$$

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(\cos^{-1}x) P_n(x)\,dx$$

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2}\left(\frac{r}{c}\right)^n \left(\int_{-1}^{1} f(\cos^{-1}x) P_n(x)\,dx\right) P_n(x)$$

* درمسأله انتقال حرارت هم باید روش جین با ثابت و ترانی * درمسأله سطح بیرونی عایق باشد یا convection باشد.

« جلسه‌ی بیست و پنجم »

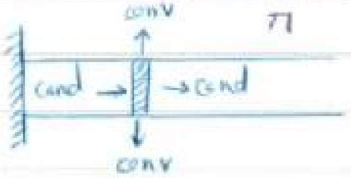
مثال ۱۲ ازفصل ۴

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - \overbrace{b\,u(x,t)}^{\text{convection term}}$$

$u(0,t) = 0$ $\qquad f(x) = \sinh ax$

$u(\pi,t) = 1$

$u(x,0) = 0$ $\qquad = \dfrac{2\sinh a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{a^2+n^2}\sin nx$




$u(x,t) = U + \phi(x)$

$U(0,t) = 0$

$U(\pi,t) = 0$

$u(0,t) = 0 \Rightarrow \phi(0) = 0 \quad , \phi(\pi) = 1$

$u(x,0) = 0 = U(x,0) + \phi(x) \Rightarrow U(x,0) = -\phi(x)$

$\Rightarrow \dots \qquad \Rightarrow \phi(x) = \frac{x}{\pi}$

$U_t = U_{xx} - b\left(U + \frac{x}{\pi}\right)$

$U = XT$

$\dot{T}X = X''T - bXT - \frac{bx}{\pi}$

$(\dot{T} + bT)X = X''T - \frac{bx}{\pi}$

$\frac{\dot{T} + bT}{T} = -\lambda^2$

$\dot{T} + (b+\lambda^2)T = 0 \longrightarrow T = e^{-(b+\lambda^2)t}$

$$\left[-(b+\lambda^2)e^{-(b+\lambda^2)t} + b\,e^{-(b+\lambda^2)t}\right]X = X''e^{-(b+\lambda^2)t} - b\frac{x}{\pi}$$

$$\Rightarrow \left[-\lambda^2 e^{-(b+\lambda^2)t}\right] X = X'' e^{-(b+\lambda^2)t} - \frac{bx}{\pi}$$

$$X'' + \lambda^2 X = -\frac{bx}{\pi} e^{(b+\lambda^2)t}$$

به جواب نرسید!

روش دوم

$$u_{xx}(x,t) - b u(x,t) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} u_{xx} - bu = 0 \\ s^2 - b = 0 \longrightarrow s = \pm\sqrt{b} \end{array}\right\} \quad u = A\sinh\sqrt{b}x + B\cosh\sqrt{b}x$$

شرایط مرزی $B = 0 \quad ; A\sinh\sqrt{b}\pi = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{\sinh\sqrt{b}\pi}$

$$U(0,t) = 0 \longrightarrow \phi(0) = 0$$
$$U(\pi,t) = 0 \longrightarrow \phi(\pi) = 1$$

$$u(x,t) = U(x,t) + \phi(x)$$
$$U_t = U_{xx} + \phi''(x) - bU - b\phi(x)$$
$$U = X(x)\,T(t)$$
$$\dot{T}X = X''T + \phi'' - bXT - b\phi$$
$$\phi'' - b\phi = 0 \longrightarrow \begin{cases} \phi(0) = 0 \\ \phi(\pi) = 1 \end{cases}$$
$$\phi = \frac{\sinh\sqrt{b}\,x}{\sinh\pi\sqrt{b}}$$

φ لزوماً خطی نیست باید طوری انتخاب گردد معادله همگن شود

$$\dot{T}X = X''T - bXT \Rightarrow (\dot{T} + bT)X = X''T$$

$$\dot{T} + (b+\lambda^2)T = 0 \qquad \Rightarrow \begin{cases} U(0,t) = 0 \\ U(\pi,t) = 0 \\ X'' + \lambda^2 X = 0 \longrightarrow X = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x \\ \quad B = 0 \quad ; \lambda\pi = n\pi \end{cases}$$

$$e^{-(b+\lambda^2)t} = T(x)$$

$$u(x,t) = \frac{\sinh\sqrt{b}x}{\sinh\pi\sqrt{b}} + \sum A_n e^{-(b+n^2)t} \sin nx$$

$$u(x,0) = 0 \longrightarrow \sum A_n \sin nx + \frac{\sinh\sqrt{b}\,x}{\sinh\pi\sqrt{\pi}} \longrightarrow$$ برای بدست آوردن $A_n$ از استفاده می شود suggest

(۵۴)  Year Month Day    سوال ۹ ص ۱۴۱    $\dot{T} + \alpha^2 T = b_n(t)$    Subject:

مثال: صفحه ۱۴۰ سوال ۱    $* \; q(x,t) = \sum b_n(t) \sin n\pi x$

$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + x\,p(t)$

بسط فوریه $x$

$u(0,t) = u(1,t) = 0$    $*$ با $x^2$

$u(x,0) = 0$

مثل مثال حل شده در کلاس بر حسب مکان حل می‌کنیم فقط نیاز به بسط فوریه ۱ داریم

$u_t = u_{xx} + q(t) \times 1$

بسط فوریه

«جلسه‌ی بیست و ششم»

فصل

حساب تغییرات

حداقل و حداکثر توابع بدون شرط

می‌خواهیم تابع $f$ را در محدوده‌ی $a < x < b$ اکسترمایز نماییم. (حداقل یا حداکثر آن را به دست آوریم)

شرط لازم برای اینکه تابع در نقطه‌ی $x_0$ که در آن $a < x_0 < b$ است، اکسترمم باشد این است که $f'(x_0) = 0$. باید توجه داشت که $x = a$ و $x = b$ داخل محدوده نیستند و در نتیجه $f(x_0)$ را باید با $f(a)$ و $f(b)$ مقایسه نمود.

شرط لازم برای اینکه تابع $f(x)$ در $x = x_0$ ماکزیمم شود آن است که $\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0} < 0$ (تقعر منحنی رو به پایین) و شرط لازم برای اینکه تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x = x_0$ مینیمم شود آن است که $\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0} > 0$ باشد. (تقعر رو به بالا)

Year. Month. Day. Subject:

در صورتی که تابع f، تابعی از دو متغیر مستقل باشد:

$$f = f(x,y) \quad , \quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = 0 \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = 0 \end{cases}$$

در این صورت می گوییم تابع در نقطه ی $(x_0,y_0)$ اکسترمم است.

**اکسترمایز کردن توابع با شرط:**

تابع $f(x,y)$ را می خواهیم با شرط $G(x,y) = 0$ اکسترمایز کنیم (تعداد شرط ها باید از تعداد متغیرهای مسأله کمتر باشد). از دو روش برای حل مسأله می توان استفاده کرد:

**۱- روش مستقیم:** از این روش عموماً در حالتی استفاده می شود که بتوان معادله ی $G(x,y)=0$ را حل کرد و $y$ را برحسب $x$ به دست آورد.

$$G(x,y) = 0 \longrightarrow y = g(x) \longrightarrow dy = \frac{\partial g}{\partial x} dx$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \cdot dx$$

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = 0}$$

Farhang Gostar

Year. Month. Day. Subject:

۲- روش پارامتر لاگرانژ: دراین روش تابع $f_L(x,y,\lambda)$ است:

ضریب لاگرانژ: $\lambda$

$$f_L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda G(x,y)$$

فرض می کنیم سه متغیر مستقل داریم، $x$ و $y$ و $\lambda$ و $f_L$ را اکسترمایز می کنیم:

$$df_L = \frac{\partial f_L}{\partial x}dx + \frac{\partial f_L}{\partial y}dy + \frac{\partial f_L}{\partial \lambda}d\lambda = 0$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial f_L}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,\lambda)} = 0 \longrightarrow \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} + \lambda \left.\dfrac{\partial G}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial f_L}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,\lambda)} = 0 \longrightarrow \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} + \lambda \left.\dfrac{\partial G}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial f_L}{\partial \lambda}\right|_{(x_0,y_0,\lambda)} = 0 \longrightarrow G(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$

$x_0$، $y_0$ و $\lambda$ با استفاده از سه معادلهی بالا به دست می آیند.

مثال: تابع روبه رو را با شرط $G(x,y) = 0$ اکسترمایز کنید.

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 8x + y + 1$$

$$G(x,y) = 2x - y = 0$$

* می توان از هر دو روش استفاده کرد. روش اول فقط زمانی کاربرد دارد که بتوان $y$ را برحسب $x$ بدست آورد.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 8 \qquad \frac{\partial G}{\partial x} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 1 \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = -1$$

روش پارامتر لاگرانژ:

$$f_L = 2x^2 + y^2 - 8x + y + 1 + \lambda(2x - y)$$

$$\left\{\begin{array}{l} 4x_0 - 8 + 2\lambda = 0 \\ 2y_0 + 1 - \lambda = 0 \longrightarrow 4x_0 + 1 - \lambda = 0 \\ 2x_0 - y_0 = 0 \longrightarrow y_0 = 2x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\lambda - 9 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \rightarrow x_0 = \frac{1}{2} \rightarrow y_0 = 1$$

روش مستقیم:

$$y = 2x = g(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$4x - 8 + (2y+1) \cdot 2 = 0 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 4x - 8 + 8x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

می‌خواهیم تابع y را طوری پیدا کنیم که $\underbrace{\text{functional}}_{\text{تابعک}}$ (تابعِ تابع) را اکسترمم نماید.

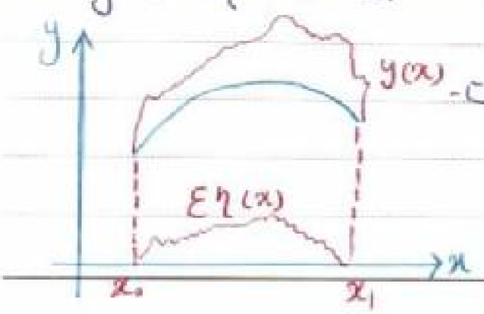
این تابعک را می‌توان به صورت زیر نشان داد که در آن F معلوم است و در نهایت y(x) محاسبه می‌شود:

$$\underbrace{I(y)}_{\text{تابعک}} = \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{F}_{\text{تابعک}}(x, y, y')\, dx$$

زمانی که بخواهیم اکسترمم تابعکی مثل I را به دست آوریم، در حالتی که متغیر مستقل ثابت است از روش حساب تغییرات استفاده می‌کنیم.

معادله‌ی اویلر:

فرض: تابع y در حالتی است که I را اکسترمم کرده است، تابعی مثل $\varepsilon\eta(x)$ را به y اضافه می‌کنیم. $\eta(x)$ در $x = x_0$ و $x = x_1$ صفر است.



Year. Month. Day. Subject:

$$I(\varepsilon)=\int_{x_0}^{x_1}\underbrace{F(x, y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta')}_{F(\varepsilon)}\,dx$$

$I$، با توجه به فرض گفته شده در $\varepsilon=0$، مینیمم مقدار خود را دارد.

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0 \longrightarrow \frac{dI}{d\varepsilon}=\frac{d}{d\varepsilon}\int_{x_0}^{x_1}F(x, y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta')\,dx$$

$$\frac{dF}{d\varepsilon}=\frac{\partial F(\varepsilon)}{\partial(y+\varepsilon\eta)}\eta+\frac{\partial F(\varepsilon)}{\partial(y'+\varepsilon\eta')}\eta'$$

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial(y+\varepsilon\eta)}d(y+\varepsilon\eta)+\frac{\partial F}{\partial(y'+\varepsilon\eta')}d(y'+\varepsilon\eta')$$

$$\frac{dF}{d\varepsilon}=0+\frac{\partial F}{\partial(y+\varepsilon\eta)}\cdot\eta+\frac{\partial F}{\partial(y'+\varepsilon\eta')}\cdot\eta'$$

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial(y+\underbrace{\varepsilon\eta}_{0})}\eta+\frac{\partial F}{\partial(y'+\underbrace{\varepsilon\eta'}_{0})}\eta'\right]\delta y\,dx$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right]\delta y\,dx=0$$

با روش جزء به جزء

$$\eta'dx=d\beta \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial y'}=\alpha$$

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F}{\partial y}\eta\,\delta y\,dx+\eta\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\eta\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\,dx$$

$$\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\delta y\,\eta\,\underbrace{\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]}_{=0}dx=0$$

براساس قضیه‌ی اساسی حساب تغییرات

Farhang Gostar

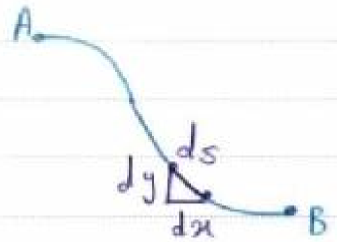
معادله‌ی اویلر:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

قضیه‌ی اساسی حساب تغییرات: اگر تابع $M(x)$ یک تابع پیوسته در $x_0 \le x \le x_1$ باشد و $\eta(x)$ یک تابع پیوسته و دارای مشتق اول پیوسته نیز باشد و همچنین در نقاط $x_0$ و $x_1$ صفر گردد یعنی $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ و اگر $\int_{x_0}^{x_1} \eta(x) M(x)\, dx = 0$، وقتی که $\eta(x)$ هر تابع دلخواهی باشد که این شرایط را ارضا کند آنگاه برای $x_0 \le x \le x_1$ داریم: $M(x) = 0$

«جلسه‌ی بیست و هفتم»

مثال: تابع $y(x)$ چه باشد تا طول مسیر کوتاه‌ترین شود؟




$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1+y'^2}\, . dx$$

$$AB = \int_a^b ds = \int_a^b dx\sqrt{1+y'^2}$$

$$F = (1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$$

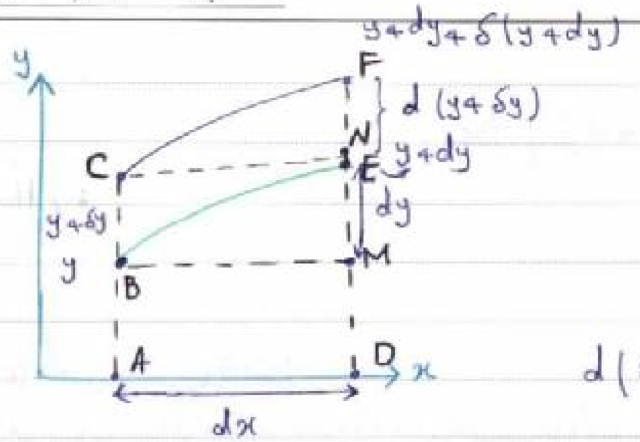
$$I = \int_a^b \underbrace{\sqrt{1+y'^2}}_{F}\, . dx \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{2}(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} \times 2y'$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{2y'}{2\sqrt{(1+y'^2)}} \longrightarrow -\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$$

$$\longrightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{ثابت} = C \longrightarrow \frac{y'^2}{1+y'^2} = C \Rightarrow y'^2(1-C) = C$$

$$\Rightarrow y' = C_1 \quad \Rightarrow y = C_1 x + C_2$$




نمو دیفرانسیلی : $dy$

نمو تغییراتی : $\delta y$

$$d(\delta y) = \delta(dy)$$

$$EF = \delta(y+dy)$$

$$AB + BC + NF = DF$$

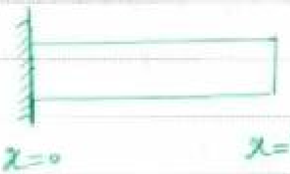
$$\cancel{y} + \cancel{\delta y} + d(\cancel{y} + \delta y) = \cancel{y} + \cancel{dy} + \delta(\cancel{y} + dy)$$

$$\boxed{d(\delta y) = \delta(dy)}$$

مثال:

معادله انتقال حرارت در یک فین: (در حالت پایا)

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$




$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$

برای $\theta$ چند جمله‌ای حدس می‌زنیم:

سه تا مجهول داریم: دو تا از شرایط مرزی، یکی از حساب تغییرات

$$\theta = ax^2 + bx + c$$

باید این چند جمله‌ای کمترین میزان خطا را داشته باشد:

$$\Big(\underbrace{\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta}_{\text{جواب تقریبی}} \; \underbrace{-0}_{\text{جواب دقیق}}\Big)$$

$$I = \int_0^L \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta\right) dx$$

$\theta$ را که به صورت چند جمله‌ای فرض کرده‌ایم، در معادله قرار می‌دهیم. $\theta$ باید به نحوی باشد که $I$،

Year. Month. Day. Subject:

مینیمم شود.

$$I = \int_0^1 \left( 2a - m^2 (ax^2 + bx + c) \right) dx$$

$$I = \int F(x, y, y')\, dx$$

$$I = \int F(x, \theta, \theta'')\, dx$$

[مثال کاربردی در سیالات]

* یکی از کاربردهای حساب تغییرات ← مینیمم کردن تابع خطا است.

مثال:

$$\begin{cases} I(y) = \int_0^2 (4x^2 y + y'^2)\, dx \\ y(0) = 0 \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

$$F(x, y, y') = 4x^2 y + y'^2 \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 4x^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' \longrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 2y''$$

معادلهٔ اویلر:

$$4x^2 - 2y'' = 0$$

$$y'' = 2x^2 \longrightarrow y' = x^3 + C_1 \longrightarrow y = \frac{x^4}{4} + C_1 x + C_2 \longrightarrow C_2 = 0$$

$$\longrightarrow C_1 = -2$$

$$\boxed{y(x) = \frac{x^4}{4} - 2x}$$

$$f(x) = \sum C_n \phi_n$$

$$E = \| f - C_n \phi_n \|$$

برای مینیمم کردن خطا می‌توان از حساب تغییرات استفاده کرد.

$$I = \int_0^1 \| f - C_n \phi_n \|\, dx$$

اگر $\frac{\partial F}{\partial y'}$ تابعی از $x$، $y$ و $y'$ باشد:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = G$$

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial G}{\partial y'} \cdot dy'$$

Year. Month. Day. Subject:

$$\frac{dG}{dx} = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial G}{\partial y'} \cdot y''$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \cdot y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot y''$$

معادله‌ی اویلر برای این حالت:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - y' \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} - y'' \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 0$$

قضیه: دو مسأله variational معادل‌اند اگر اختلاف عبارت داخل انتگرال، یک دیفرانسیل کامل باشد.

$$I_1(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$$

$$I_2(y) = \int_{x_0}^{x_1} \left( F(x, y, y') + \overbrace{\frac{d\phi}{dx}}^{\Psi} \right) dx$$

باید ثابت کنیم، معادله‌ی اویلر هر دو یکسان است.

$I_2$ معادله اویلر $\quad \dfrac{\partial}{\partial y}(F + \Psi) - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial (F+\Psi)}{\partial y'}\right) = 0$

$$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}_{I_1 \text{ معادله‌ی اویلر}} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y'}\right) = 0$$

$$\phi = \phi(x, y)$$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot dy$$

$$\Psi = \frac{d\phi}{dx} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot y'$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y'} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\overbrace{\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y'}\right)}^{A} = \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot y'\right)}_{\Psi} - \frac{1}{dx} \cdot d\overbrace{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y'}\right)}^{G}$$

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial G}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial G}{\partial y'}\cdot dy'$$

$$\frac{dG}{dx} = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\cdot y' + \frac{\partial G}{\partial y'}\cdot y''$$

$$A = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + y'\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + y''\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y'}\right)\cdot y' + y''\cdot\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y'}\right)\right]$$

از طرفی $\frac{\partial \Psi}{\partial y'} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$

پس $A = 0 \Leftarrow$ معادله اویلر $I_1$ = معادله اویلر $I_2$

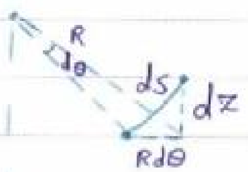
تعریف: دو مسأله‌ی variational را معادل گویند هرگاه اکسترمال‌های آنها معادل باشند.

اکسترمال: به تابع $y(x)$ که انتگرال را اکسترمایز می‌کند اکسترمال می‌گویند.

«جلسه‌ی بیست و هشتم»

مثال: مینیمم $ds$ را پیدا کنید.

کوتاه‌ترین فاصله‌ی بین دو نقطه روی سطح استوانه‌ای را بدست آورید.





$$ds = \sqrt{(R\,d\theta)^2 + (dz)^2} = d\theta\sqrt{R^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{R^2 + z'^2}\;d\theta$$

$$I = \int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{R^2 + (z')^2}\,d\theta$$

$$\Rightarrow F(\theta, z, z') = \sqrt{R^2 + z'^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)=0$$

$$0-\frac{d}{d\theta}\left(\frac{2z'}{2\sqrt{R^2+z'^2}}\right)=0 \Longrightarrow \frac{z'}{\sqrt{R^2+z'^2}}=C$$

$$z'^2=c\,(R^2+z'^2) \Longrightarrow z'^2-cz'^2=R^2 \Longrightarrow z'^2(1-c^2)=R^2$$

$$z'^2=\frac{R^2}{(1-c^2)} \qquad z'=\text{مقدار ثابت} \qquad R:\text{شعاع استوانه}$$

$$\Rightarrow \underline{z=k\theta} \qquad k:\text{عدد ثابت}$$

* اکسترمایز کردن تابعک‌هایی که شامل چندین تابع و یک متغیر مستقل هستند

$$I(y_1,y_2,\dots,y_n)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_2,\dots,y_n,y_1',y_2',\dots,y_n')\,dx$$

$i=1,2,\dots,n$ و $y_i(x_1)$ و $y_i(x_0)$ معلوم هستند.

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right)=0$$ معادله اویلر:

در این حالت به ازای هر $y_i$ یک معادله‌ی اویلر داریم. به عبارت دیگر سیستمی از n معادله‌ی دیفرانسیل درجه‌ی دوم داریم.

مثال:

$$I(y,z)=\int_{x_0}^{x_1}\left[2yz-2y^2+(y')^2-(z')^2\right]dx$$

$$F(x,y,z,y',z')=2yz-2y^2+y'^2-z'^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \longrightarrow 2z-4y-2y''=0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)=0 \longrightarrow 2y+2z''=0 \quad (2)$$

$$(2)\quad y=-z'' \xrightarrow{(1)} 2z+4z''+2z^{(4)}=0$$

معادله مفسر: $r^4 + 2r^2 + 1 = 0 \implies (r^2+1)^2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} r = \pm i \\ r = \pm i \end{cases}$

همه ریشه‌ها مضاعف‌اند

$$Z = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3\, x \sin x + C_4\, x \cos x$$

* اکسترمم کردن تابعک‌هایی که شامل تابعی از چند متغیر مستقل هستند:

$$I(Z) = \iint_D F\left(x, y, Z, \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$Z = Z(x,y) \quad , \quad P = \frac{\partial Z}{\partial x} \quad , \quad q = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

چون تابع دو متغیره است پس رویه است نه خط یا

معادله اویلر:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial P}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right) = 0}$$

مثال:

$$F\left(x, y, Z, \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y}\right) = Z + \underbrace{\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2}_{P^2} + \underbrace{\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2}_{q^2}$$

$$1 - \frac{\partial}{\partial x}(2P) - \frac{\partial}{\partial y}(2q) = 0$$

$$1 - 2\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{1}{2}}$$

* اکسترمم کردن تابعک‌هایی که حاوی تابع با مشتقات مرتبه بالا هستند:

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) dx$$

$$\boxed{\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(m)}}\right) = 0}$$

* اکسترمم کردن تابعک‌هایی که شامل چند تابع با مشتقات مرتبه بالا هستند:

$$I(y, Z) = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}, Z, Z', \dots, Z^{(k)}\right) dx$$

Year. Month. Day. Subject:

$$\sum_{m=0}^{k} (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{\partial F}{\partial z^{(m)}}\right) = 0$$

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(m)}}\right) = 0$$

* اکسترمم کردن تابعک‌هایی که شامل تابعی از چند متغیر مستقل حاوی مشتقات مرتبه‌ی دوم هستند:

$$I(z) = \iint_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) dx\, dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right) = 0$$

معادله اویلر:

« جلسه‌ی بیست و نهم »

مسائل variational

که دارای شرط هستند:

$$\begin{cases} I(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n) & (I) \\ \phi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 & i = 1, 2, \ldots, m < n \end{cases}$$

دو روش حل دارند:

Farhang Gostar

## روش مستقیم:

حل معادلات جبری برای توابع $y_1, y_2, \dots, y_n$ و جاینشین کردن جوابها در رابطهٔ (I) به صورت: $I(y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n)$ خواهد بود که منجر به $n-m$ معادلهٔ اویلر می‌شود.

روش دوم (متداول‌تر): روش پارامتر لاگرانژ:

هر قید را به ضریب لاگرانژ ضرب کرده با F جمع می‌کنیم:

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\lambda_i(x)}_{\text{پارامتر لاگرانژ}} \phi_i(x, y_1, \dots, y_n)$$

$$I^*(y_1, y_2, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx$$

معادله‌ی اویلر برای $F^*$:

$$\frac{\partial F^*}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F^*}{\partial y_i'}\right) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial \lambda_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \lambda_i'}\right) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$\rightarrow \phi_i = 0$

مثال: با توجه به شرط تابع را اکسترمایز کنید.

$$I(y_1, y_2, y_3) = \int_0^1 \sqrt{y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2}\, dx \quad (1)$$

$y_1(0) = 0 \qquad y_1(1) = \frac{1}{\sqrt{14}}$

$y_2(0) = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad y_2(1) = \frac{2}{\sqrt{14}}$

$y_3(0) = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad y_3(1) = \frac{3}{\sqrt{14}}$

قید: $\phi_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1 = 0$

$$I^* = \int_0^1 \Big[ \underbrace{\sqrt{y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2} + \lambda_1 (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1)}_{F^*} \Big] dx$$

Year. Month. Day. Subject:

$$\frac{\partial F^*}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F^*}{\partial y_i'}\right) = 0$$

$$2\lambda_1 y_1 - \frac{d}{dx}\left(\frac{y_1'}{\underbrace{\sqrt{y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2}}_{F}}\right) = 0$$

$$2\lambda_1 y_2 - \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2'}{F}\right) = 0$$

$$2\lambda_1 y_3 - \frac{d}{dx}\left(\frac{y_3'}{F}\right) = 0$$

$$2\lambda_1 y_1 - \frac{y_1'' F - F' y_1'}{F^2} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow 2\lambda_1 &= \frac{y_1'' F - F' y_1'}{F^2 y_1} \\ 2\lambda_1 &= \frac{y_2'' F - F' y_2'}{F^2 y_2} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{y_1'' F - F' y_1'}{F^2 y_1} = \frac{y_2'' F - F' y_2'}{F^2 y_2}$$

$$y_2 y_1'' F - F' y_1' y_2 = y_1 y_2'' F - F' y_2' y_1$$

$$(y_2 y_1'' - y_1 y_2'')F = (y_1' y_2 - y_2' y_1)F' \longrightarrow$$

$$\frac{F'}{F} = \frac{(y_2 y_1'' - y_1 y_2'')}{y_1' y_2 - y_2' y_1}$$

$$y_2 y_1'' - y_1 y_2'' = (y_2 y_1' - y_1 y_2')' \qquad y_2' y_1' + y_2 y_1'' - y_1' y_2' - y_1 y_2''$$

$$\frac{F'}{F} = \frac{(\underbrace{y_2 y_1' - y_1 y_2'}_{u})'}{y_2 y_1' - y_1 y_2'}$$

$$\frac{F'}{F} = \frac{u'}{u} \xrightarrow{\int} \ln F = \ln u + C_{12} \rightsquigarrow \text{ثابت}$$

$$\longrightarrow \frac{u}{F} = C_{12} \Rightarrow \begin{cases} y_1' y_2 - y_1 y_2' = C_{12} F \\ y_2' y_3 - y_2 y_3' = C_{23} F \end{cases} \longrightarrow \frac{y_1' y_2 - y_1 y_2'}{y_2' y_3 - y_2 y_3'} = \frac{C_{12}}{C_{23}} = C_0$$

* ثابت‌ها از شرایط مرزی بدست می‌آیند.

$$y_2\left(y_1' + C_0 y_3'\right) = y_2'\left(y_1 + C_0 y_3\right)$$

$$\longrightarrow \frac{y_2'}{y_2} = \frac{y_1' + C_0 y_3'}{y_1 + C_0 y_3} \longrightarrow y_2 = C_1 y_1 + C_2 y_3$$

$$y_2(0) = C_1 y_1(0) + C_2 y_3(0) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = C_2 \times \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}$$

$$y_2(1) = C_1 y_1(1) + C_2 y_3(1) \Rightarrow C_1 = \frac{3}{2}$$

$$y_2 = \frac{3}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_3$$

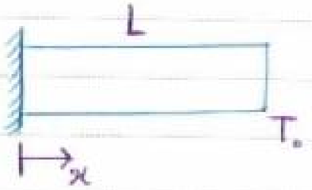
این را در $\Phi$ قرار داده و $y_3$ برحسب $y_1$ بدست می‌آید؛ پس $y_3$ و $y_2$ برحسب $y_1$ بدست می‌آید:

و در معادله‌ی اولیه ① بجای $y_2$ و $y_3$ مقادیری که برحسب $y_1$ بدست آمده‌اند را قرار می‌دهیم و مسئله

را حل می‌کنیم و $I$ را برحسب $y_1$ بدست آمده اکسترمایز می‌کنیم.

مسائل variation در انتقال حرارت: بخش روش ریتز ← فصل هشتم ← Arpaci : مرجع
مطالعه شود

یک پره:




$$\theta = T - T_\infty$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \\ \theta\big|_{x=L} = \theta_0 = T_0 - T_\infty \\ \dfrac{d\theta}{dx}\Big|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

ابتدا variation معادله‌ی دیفرانسیل را حساب می‌کنیم:

$$I = \int_0^L \Big( \underbrace{\frac{d^2\theta}{dx^2}}_{\theta''} - m^2\theta \Big)\, \delta\theta \, dx$$

$$\int \alpha\, d\beta = \alpha\beta - \int \beta\, d\alpha = \delta\theta \frac{d\theta}{dx}\Big|_0^L - \int_0^L \frac{d}{dx}(\delta\theta)\cdot\theta'$$

$$= \int_0^L (\underbrace{\theta''}_{d\beta}\underbrace{\delta\theta}_{\alpha} - m^2\theta\,\delta\theta)\,dx = \left(\delta\theta \cdot \frac{d\theta}{dx}\right|_0^L - \int_0^L \left[\underbrace{\frac{d(\delta\theta)}{dx}\cdot\theta'}_{\delta(\theta')\cdot\theta'} - \frac{m^2\delta(\theta^2)}{2}\right]dx$$

قبلاً اثبات شد که:

$$d(\delta y) = \delta(dy)$$

= ۰ شرایط مرزی را نشان می‌دهد چون

$$I = \left(\delta\theta \cdot \frac{d\theta}{dx}\right|_0^L - \delta\int_0^L \frac{1}{2}(\theta'^2 - m^2\theta^2)\,dx$$

**Ritz Method**

روش ریتز:

در این روش برای $\theta$ یک چند جمله‌ای در نظر می‌گیریم:

$$\theta = \sum a_i \phi_i$$

$\phi_i$: چند جمله‌ای از درجه‌ی $i$

$\theta$ را در $I$ قرار داده و ضرایب $a_i$ مجهول را بدست می‌آوریم.

چون $\theta$ باید شرایط مرزی را ارضا کند، قسمت اول $I$ خود به خود حذف می‌شود، پس باید این مسأله حل شود:

$$I(a_1, a_2, \dots, a_n) = \delta\int_0^L (\theta'' - m^2\theta)\,dx = 0$$

ادامه مثال قبل: با درنظرگرفتن چند جمله‌ای درجه‌ی ۲، $\theta$ را بیابید.

فرض می‌کنیم:

$$\theta = ax^2 + bx + c$$

$$\frac{d\theta}{dx}\Big|_{x=0} = 2ax + b = 0 \longrightarrow b = 0$$

$$\theta = ax^2 + c$$

$$\theta\Big|_{x=L} = \theta_0 \longrightarrow aL^2 + c = \theta_0 \longrightarrow c = \theta_0 - aL^2$$

$\theta = \theta_0 + a(x^2 - L^2)$

* باید a را طوری بدست آوریم که خطا مینیمم شود.

$$I = \int_0^L (\theta'' - m^2\theta)\delta\theta\, dx = \int_0^L (2a - m^2\theta_0 - m^2 a x^2 + m^2 a L^2)(x^2 - L^2)\delta a\, dx = 0$$

جواب انتگرال:

$\underbrace{L=1}_{\text{به دلخواه}} \Longrightarrow \left[2\left(1 + \frac{4m^2}{5}\right)a - m^2\right]\delta a = 0$

$$\Longrightarrow a = \frac{m^2/2}{1 + \frac{4m^2}{5}}$$

$\theta = \theta_0 + a(x^2 - L^2) + a_1(x^2 - L^2)^2$

$\delta\theta = (x^2 - L^2)\delta a + (x^2 - L^2)^2 \delta a_1$

$I = \int_0^L (\theta'' - m^2\theta)\delta\theta\, dx$

پس از محاسبه‌ی انتگرال، ضرایب $\delta a_1$ و $\delta a$ که به طور جداگانه برابر با صفر قرار داده شده و a و $a_1$ به دست می‌آیند.

برای امتحان درجه دو مطالعه شود (درجه ۴ حجم محاسبات بالا است) همچنین شرایط مرزی عوض می‌شود